This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

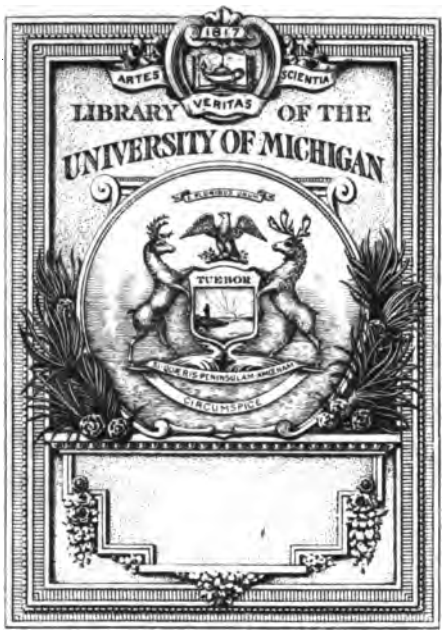
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SIRCUMSPICE

J. Войцинский

2.50

QA
7
.M73

COMMENTATIONES MATHEMATICO-PHILOLOGICAE TRES,

SISTENTES

EXPLICATIONEM DVORVM LOCORVM DIFFICILIVM, ALTERIVS VIRGILII, ALTERIVS PLATONIS,

ITEMQVE

EXAMINATIONEM DVORVM MENSVRARVM PRAECEPTORVM COLVMELLAE.

ADIECTA EST EPISTOLA

AD

VIRVM CLARISSIMVM I. G. SCHNEIDER, SAXONEM

PROFESSOR. VRATISLAVIENS.

DE

EXCERPTIS GEOMETRICIS EPAPHRODITI ET VITRVVII RVFI

SCRIPTA

AB AVCTORE HARVM COMMENTATIONVM

CAROLO BRANDANO MOLLWEIDE,

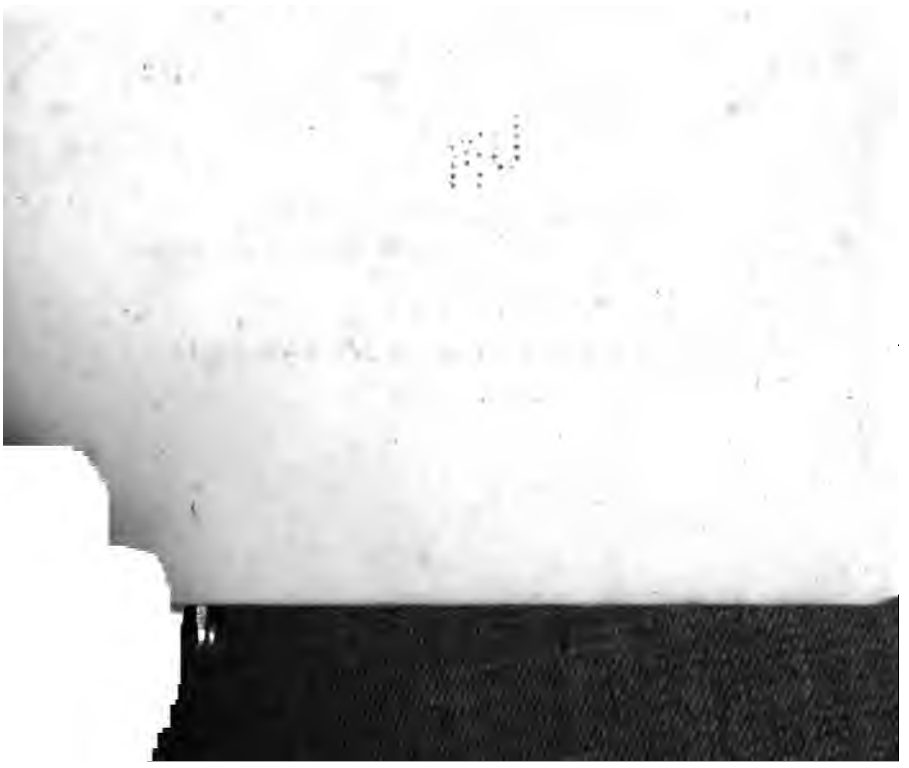
ASTRON. IN ACAD. LIPS. PROFESSORE.

ACCEDIT TABVLA AENEA.

LIPSIAE

SVMTIBVS CAROLI CNOBLOCHII

MDCCCXIII.



Hist. of Science
Bücherwurm
1-4-39
37546

N. GOLDBERG
№
Abteilung

PRAEFATIO.

Commentatiuncularum, quas hic faſciculus offert, prima pro cathedra a me ad conſequenda magiſterii Lipſienſis iura more academico ſuſtentata eſt et defenſa, iamque tunc in vulgus edita. Cauſa editionis iteratae fuit, vt eruditi, ſi qui illam propius inſpicere voluerint, (foris enim requiri ex bibliopola intellexi) expeditioris comparationis opportunitatem haberent. In quo propoſito non parum confirmabar eo, quod diſſertationem iſtam duumuiris ſummi inter eruditos nominis, Hermanno et Wolfio, haud displicuiſſe, cognoui, quorum ille in disputatione publica, qua opponentis partes ſuscipere haud dedignatus eſt, quantum faueret opellae meae, aperte ſignificauit, hic iſtam ipſam commentationem primis tantum lineis adumbratam, qualis in Illuſtriſſ. de Zach diario extat *), non minus fauenti

*) *Monatl. Correſp. B. V. S.* 416. *u. folgg.*

ſuffragio excepit, quod coram, poſtquam Halae in ipſius notitiam et familiaritatem venire mihi contigit, declarauit. Idem hic vir eruditiſſimus auctor extitit mihi, vt Platonis locum altera commentatione tractatum enodare adgrederer. Cuius auctoritati quum paruiſſem, quam compoſueram exercitationem, obtuli Societati Regiae Goettingenſi, quae eam non ſine teſtificatione adſenſus accepit, de eaque relationem diario ſub ipſius ductu prodeunti inſerendam *) curauit. Verum quum pro harum ephemeridum inſtituto relatio iſta nonniſi breuis eſſe poſſet, et inſuper figuris ad explicationem a me propoſitam plene intelligendam neceſſariis deſtitueretur, conſilium cepi, integram edendi commentationem, idque eo magis, quod etiamnum circa iſtum Platonis locum haereri ac laborari vidi. Commentatio tertia et ipſa Societati Regiae Goettingenſi in gratiam tributi mihi honoris commercii epiſtolarum exhibita ideo prodit hic, partim vt poſtulationi viri docti, qui in diario praedicto de illa retulit **), in formularum Columellianarum originem paullo

*) *Götting. gel. Anz.* 1805. *St.* 124. *p.* 1233.

**) *Gött. gel. Anz.* 1807. *St.* 74. *p.* 729.

diligentius inquirendi, quod iam praeſtitum arbitror, concederem, partim quod eam a viris doctis, quos inter eruditiſſimum Schneiderum honoris cauſa nomino, poſtulari comperi. Omni autem ſtudio id egi, vt adſenſu, quem commentatiunculae hic exhibitae apud eruditos iampridem tulerunt, adhuc digniores redderem. Ea mente nonnulla penitus refinxi, alia correxi plura addidi. Sic v. c. in prima commentatione totus locus de ortu et occaſu ſiderum plane aliter conſtitutus, et generalius atque exactius explicatus eſt, caſusque, in quibus fuga ſideri alicui reſpectu alterius poteſt ac ſolet affingi, omnes ſunt euoluti atque exemplis illuſtrati, nec non Manilii locus, in quo vocabulum Piſcis ſine vllo additamento de Piſce notio dictum eſt, productus, id quod ad explicationem loci Virgiliani magni momenti eſt. Singulis vero commentationibus acceſſit breuis recenſus conaminum virorum doctorum, qui in eodem, quod quaeque commentatio propoſitum habet, argumento laborarunt. Ceterum ſi quis ea iudicii acerbitate fuerit, vt lucubratiunculas iſtas a ratione muneris profeſſoris aſtronomiae et ſpectatoris coeli ſiderumque aliena putet, neque cum eo conſociandas pronunciet, ſciat, ſpeculae aſtrono-

micae noſtrae refectionem ſumme neceſſariam, eamque inchoatam quidem, at nondum abſolutam iamdudum mihi ingratum otium ab inſtituendis ſiderum obſeruationibus feciſſe, tum cogitet velim, diſſertationis primae materiem haud ita longe a re aſtronomica ſeiunctam, poſteriores duas autem ante exaratas eſſe, quam munus, quo in praeſens fungor, mihi demandaretur, denique meminerit quaeſo, ante hoc noſtrum aeuum, vt bene monuit Clariſſimus Schneider in fine praefat. in Vitruuium, philologiae artisque criticae cognitionem et vſum vel adeo Mathematicis communem et familiarem fuiſſe, quod pluribus exemplis, ſi opus eſſet, confirmari liceret. Nihil igitur iam reſtat, quam vt otium a me ſic collocatum optem, vt neque eruditos, qui haec commentationes expetiuerunt, ſuae exſpectationis, nec me, qui morem illis geſſi, ſuscepti earum edendarum conſilii poeniteat.

Dabam Lipſiae III. Cal. Oct. MDCCCXIII.

I.

DE PISCE, QVEM OCCIDENS PLEIAS FVGIT:

AD EXPLICANDVM

LOCVM IN VIRGILII GEORG. IV. 231—235.

§. I.

Tempus recte obſeruare, omnium quidem multum, ſed plurimum agricolarum, intereſt, quippe qui omnia ſua opera temporibus ſic accommodare debeant, vti nihil ſero faciant. Priſci igitur agricolae quum calendarii ad motum ſolis accurate compoſiti et quotannis publicati commoditate deſtituerentur, ad tempeſtates anni deſignandas ortibus et occaſibus fixarum illuſtriorum ad ſolem relatis ſiue apparitionibus et occultationibus earum e ſolis annuo curſu pendentibus vſi ſunt. Neque in eo rationem iniere ſani, quem ſibi propoſitum habebant, adeo ineptam. Nam ob fixarum motum ſuper polis eclipticae admodum tardum apparentiae illae intra vnius ſeculi vel adeo duorum ſpatium eundem prope tenorem ſeruant, certisque anni diebus ſunt adſtrictae. Quam ita neceſſitate coacti agricolae temporum denotandorum ingreſſi erant viam, eam poſtea ſcriptores rei ruſticae, medici, hiſtorici, potiſſimum vero poëtae, quibus ſiderum commemoratio materiam ornatus poëmatum ſuppeditabat, perſecuti ſunt. Virgilius inprimis tempora in Georgicorum libris hoc pacto circumſcribere amat, vt nota quadam appoſita ortus vel occaſus ſpeciem, ex qua deinde tempus eliciatur, determinet, id quod in ipſo minus mirum eſt, quum, referente Donato in eius Vita, Neapoli, vbi tunc temporis Graecae florebant litterae, mathematicae omni ſtudio indulſerit, cuius quidem ſtudii teſtes extant verſus illi nobiliſſimi ac notiſſimi:

Me vero primum dulces ante omnia Muſae,
Quarum ſacra fero ingenti perouſſus amore,
Accipiant; coelique vias et ſidera monſtrent; reliq.
GEORG. LIB. II. — 475 et ſeqq.

Ceterum iſte poëtis vſitatus temporum ſignificandorum mos nomini ortuum et occaſuum poëticorum, quo apparitiones et occultationes ſiderum ſolis curſu determinatae inſignibantur, originem dedit.

§. II.

Inter Georgicorum loca, in quibus ortus aut occaſus ſiderum fit mentio, ille quoque eſt, quo poëta tempora duo meſſis de ſatis excipiendi ſequentem in modum deſignat:

Bis grauidos cogunt fetus: duo tempora meſſis;
Taygete ſimul os terris oſtendit honeſtum
Pliias, et Oceani ſpretos pede repulit amnis
Aut eadem ſidus fugiens vbi piſcis aquoſi
Triſtior hibernas caelo deſcendit in vndas.
LIB. IV. 231—235.

Primam ergo fauorum exemtionem fieri iubet ſub exortum Pleiadis, ſecundam circa occaſum eiusdem. Quem hic ſignificat Virgilius occaſum, matutinum ſ. coſmicum eſſe, ex eo, quod tunc Pleiadem in hibernas vndas deſcendere praedicat, facile colligitur. Vnde ſponte conſequitur, ortum, quem innuit poëta, pariter matutinum ſ. heliacum eſſe, quoniam ſi de ortu veſpertino acciperes, primae meſſationis tempus ad tempus alterius nimium appropinquaret atque cum eo fere congrueret, id quod res ipſa non patitur.

§. III.

Sed quo melius, quae huc vsque dicta ſunt a nobis, et in poſterum dicentur, intelligi queant, neceſſe videtur, rem paullo altius repetamus, totamque or-

tuum et occaſuum poeticorum rationem accuratius aliquanto et fuſius exponamus.

Eſt igitur ortus et occaſus poeticus genus quoddam ortus et occaſus communis, quo ſtellae ortui atque occaſui ſubiectae quotidie ſupra horizontem euehuntur, vel infra eundem deducuntur. Ortus ſolis cet. et occaſus, qui recte comparate ad ſolem, dicuntur *poetici*, et quidem ii, qui oriente ſole contingunt, *matutini*, qui occidente, *veſpertini*. At quoniam ſole in horizonte poſito ſtella ortum vel occaſum faciens nudis oculis ſe vix aut nullo modo conſpiciendam praebet, ſolis lumine quippe exſtincta, ſed quo eius ortus occaſusue ſub adſpectum cadat, ſol ad profunditatem aliquam pro ſplendore ſtellae variantem, *arcum viſionis* dicunt, ſub horizontem depreſſus ſit, neceſſe eſt; hinc ortuum et occaſuum commemoratorum naſcitur ſubdiuiſio in *veros* et *apparentes* ſ. *viſibiles*, quorum illi in ipſum ſolis orientis occidentisue articulum incidunt, hi autem ab eius ortu vel occaſu aliquo temporis interuallo eodemque minimo omnium, quae inter ſolis exortum vel obitum ſtellaeque ad ortiuum aut occiduum horizontem appulſum intercedere poſſunt, ſeiunguntur.

Quatuor itaque ſunt ſpecies ortus poetici ſiderum totidemque occaſus eorum, quarum loco recentiorum plurimi tripliciem tantum huiusmodi ortuum et occaſuum differentiam ſtatuunt; et quidem ortum atque occaſum matutinum verum nominarunt *coſmicum*, veſpertinum verum autem *acronychium*. At ortum matutinum viſibilem itemque occaſum veſpertinum apparentem cum Seruio *) *heliacos* appellare maluerunt, quos Segnero **) praeeunte congruentius multo ortum primum et occaſum poſtremum dixeris.

---

*) ad Virgilii Georg. I. 218.

**) *Aſtronom. Vorleſ.* § 366.

§. IV.

Vt varietatis, ordinis et ſuccaſſionis horum ortuum et occaſuum, quorum ratio et fundamentum motus ſolis proprius eſt, quo aliquando propius ad fixas accedit, aliquando longius ab iis recedit, exemplum aliquod habeatur, diuerſos *Reguli* ortus et occaſus, vt ſe inuicem excipiunt, percenſebimus. Vtimur autem Regulo, quia haec primae magnitudinis ſtella, quae in Leonis pectore fulget, haud procul ab annua ſolis via poſita eſt (abeſt quippe hoc noſtro tempore $\alpha 7\frac{1}{2}'$) ideoque facilem atque expeditum contemplandi modum offert.

Medio Iulio igitur, quando Regulus ſoli ab occidente verſus orientem progredienti et ad $27^\circ \Omega$, circa quem locum Regulus noſtra aetate haeret, contendenti in tantum vicinus factus eſt, vt paullo poſt illius occaſum occidat poſtridie veſperi in regione caeli occidua haud appariturus, occaſum veſpertinum viſibilem facit, poſt quem prae fulgore ſolis aliquamdiu plane non conſpicitur. Inter hoc occultationis ſuae tempus, circa diem XX Aug., quo ſol ad $27^\circ \Omega$ peruenit, cum ipſo ſimul oritur atque occidit, ſiue verum ortum matutinum, eiusdemque nominis occaſum veſpertinum celebrat. Exeunte deinde Auguſto e ſolis verſus ortum magis progreſſi radiis emerſus tum quum primum mane ante eius exortum in parte caeli ortiua ſeſe oſtendit, ortu matutino apparente oritur. Iam in dies longius a ſole recedit, donec inchoante Februar. tantum digreſſus ſit, vt mox poſt ipſius occubitum oriatur poſtera veſpera ortum haud celebraturus. Atque tunc ortu veſpertino viſibili oritur, ex quo per aliquod tempus conſpicitur quidem, ſed neque ſupra horizontem emergens neque infra eum delabens. A die XVII Februar. autem, quo e regione ſolis $27^\circ \approx$ tenentis oritur et occidit, ſicque verum ortum veſpertinum nec

non occasum matutinum facit, rursus soli appropinquat, usque dum sub medium Mart. in tantum accesserit, vt mane ante eius ortum occidat. Et tunc occasum matutinum apparentem facit; quo celebrato, quotidie propius soli admouetur anno vertente rursus se in eius radios immersurus orbemque phaenomenorum quem descripsimus, denuo percursurus.

§. V.

In temporibus ortuum et occasuum poëticorum stellae alicuius definiendis duplicem rationem adhibere licet, experientiam dico et disciplinam. Sed illa dumtaxat ortus et occasus apparentes speculari, hac, eaque sola veros, nec minus apparentes, cernere possumus. Illi formulis non est opus, sed oculis modo valentibus: haec, scientiae positus siderum motusque solis innixa, arithmetices ac geometriae ope quaecunque circa ortus et occasus siderum quaeri possunt, patefacit, quam quidem rationem, vbi tempora praeterita spectantur, solam adhibendam esse, per se manifestum est.

§. VI.

Inuestigatio temporis, in quod ortus vel occasus stellae alicuius poëticus super dato horizonte, si quidem super eo contingere queat, incidit, per disciplinam et praecepta instituta, tribus fieri modis potest. Aut enim globo caelesti artificiali, aut planisphaerio, aut calculo conficitur. Primus modus facillimus ac phaenomenis ante oculos ponendis et velut depingendis perquam idoneus est. Quare iis maxime conuenit, qui schematum describendorum vel calculorum subducendorum haud satis guari vel in iis parum exercitati in rem praesentem tamen venire amant. Huic ipsorum omni laude prosequendo desiderio satisfaciunt institutiones de vsu vtriusque globi artificialis, quas inter

prisse loco mihi laudanda venit ille, quam Cel. Scheibelius, explicationibus et confectariis postea additis, in vulgus edidit. *) Nonnulli quoque systematum astronomicorum conditores de temporibus ortuum et occasuum poeticorum siderum, globi caelestis ope inueniendis, praecepta dederunt; quorum e numero prae ceteris Segnerus mihi nominandus est, propterea quod quomodo globus ad tempora, quae id, quo globus constructus est, vel antecedunt vel insequuntur, accommodandus sit, commonstrauit, **) quod ipsum et Celeb. Scheibelius praestitit.

§. VII.

Planisphaeriorum, quae et alias astrolabia audiunt, duo genera hic in censum veniunt, quorum vni oculo in polo mundi australi constituto planum aequatoris, siue cum Ptolemaeo nullis, tropici capricorni pro tabula est, alterum oculo in puncto Nadir dicto statuto horizontis planum tabulam habet. Illud ab astrolabiorum scriptoribus astrolabium particulare, hocautem horizontale vocatur; quae vero appellationes quum ad rationem vsumque eorum haud satis quadrare videantur, prius, omnibus omnino horizontibus accommodatum, planisphaerium vniuersale, posterius vero, ad vnum tantummodo horizontem restrictum, particulare nominabo.

De planisphaerii vniuersalis constructione vsuque admodum prolixe egit Clauius in opere singulari, cui titulum Astrolabii praefixit. In eius lib. III. can.

*) Vollständiger Unterricht vom Gebrauch der künstlichen Himmels- und Erdkugel, Breslau. 1779. 8. Erläuterungen und Zusätze zu dem vollständigen Unterricht vom Gebrauch der künstlichen Himmels- und Erdkugel, abgefasst von Ioh. Ephr. Scheibel. Breslau, 1785, 8.

**) Astronomische Vorlesungen, §. 361. u. folg.

IV. et V. tempora quaque ortuum et occasuum poli eorum stellae alicuius astrolabii ope inuenire docuit. Sed quoniam Clauii ratio nimis perplexa ac proinde non parum taediosa est, solutionis ab illo traditae methodum breuiter adumbrabimus, lectores nostros remittentes ad Clarissimi Klügelii libellum, in quo projectionis stereographicae proprietates non minus eleganter quam dilucide explicuit.

Radio itaque pro arbitrio accepto describatur circulus aequatorem repraesentans, et in eo ducantur duae, quae angulos rectos intercipiant, diametri, sectiones planorum aequatoris et vtriusque coluri nec non ipsos coluros referentes. Alterutra earum pro coluro aequinoctiorum assumta, vt altera colurum solstitiorum exhibeat, per §. 8. libelli Klügeliani describatur circulus, qui aequatorem in punctis intersectionum ipsius et coluri aequinoctiorum sub mutua aequatoris et eclipticae inclinatione transeat, adeoque ecliptican referat, inueniaturque per §. 9. projectura poli borei illius. Si iam positio stellae, de cuius ortu vel occasu poetico quaeritur, per ascensionem rectam et declinationem detur, ad locum eius in planisphaerio designandum, nihil opus est, nisi vt per §. 30. ducatur circulus aequatori parallelus, qui circulum diurnum stellae repraesentet, hincque deinde recta ex aequatoris centro, quod vtramque poli mundi refert, ad punctum in circuitu ipsius, ascensioni rectae datae competens, educta, et declinationis circulum exhibente, secetur. Sectionis punctum enim stellae locus projectus est. Sin autem stellae longitudine et latitudine data, positus ipsius ad ecliptican relatus fit, inscriptio eius perficitur describendo tum per §. 30. circulum, qui circulum eclipticae parallelum, notae distantiae stellae a polo eclipticae boreo respondentem, exhibeat, tum per §. 31. circulum, qui projecturas polorum ecliptica transiens circulum latitudinis stellae referat. Ho-

rum quippe circulorum interſectione punctum, ſtellae viam gerens, innoteſcit.

Reliquum eſt, vt in planiſphaerio horizon deſignetur, qui quidem, ob ſphaerae caeleſtis conuerſionem et inde continuo mutatum ſitum ſtellarum horizontis reſpectu, variabilis eſt. Deſcripto igitur ad datam poli elevationem ſecundum §. 8. circulo, qui horizontem in aliquolibet ipſius ſitu repraeſentet, ſi a centro aequatoris, interuallo rectae inter illud et centrum proiecturae horizontis interiectae ducatur alius circulus; huius circumducta erit locus centri proiecturae horizontis quemcumque ſitum tenentis.

Vt inueniantur iam tempora ortuum et occaſuum poeticorum ſtellae propoſitae, quaerenda ſunt prius puncta eclipticae, in quibus ſol haeret, quando ſtella oriente vel occidente et ipſe oritur aut occidit, et ex iis demum tempora deriuanda. Illi propoſito autem modo ſequente ſatisfit.

E loco ſtellae, tamquam centro, radio proiecturae horizontis ſitae arcus circulum poſtremo deſcriptum, in quo videlicet centrum proiecturae horizontis locatur, bis tranſiens et e punctis tranſitus eodem illo radio ducantur circuli duo horizontem exhibentes in duabus poſitionibus, quas ſtella ortum vel occaſum faciente habet. Horum namque circulorum et eclipticae interſectiones nota efficient quatuor puncta quaeſita, quorum quaenam ad ortum ſtellae, quaenam ad occaſum eius pertineant, ex data poſitione proiecturae meridiani, vt quae centra aequatoris et proiecturae horizontis traiiciat, facile diiudicatur.

Loca ſolis praecedenti modo reperta ad ortus et occaſus veros ſpectant. Quodſi ea requirantur, quae ortibus et occaſibus apparentibus conueniunt, per §. 30. proiiciendi adhuc ſunt circuli horizonti paralleli, in quibus quum ſol verſatur, non impedit, quo minus ſtella ortum vel occaſum faciens conſpiciatur. Eorum

enim et eclipticae intersectiones ipsum quaesita loca dabunt.

§. VIII.

Solutione problematis de temporibus ortuum et occasuum poeticorum stellae alicuius planisphaerii vniversalis ope inuestigandis expedita ad solutionem eiusdem problematis planisphaerii particularis subsidio perficiendam vt accedamus, ratio a nobis suscepta postulat. Haec autem solutio, quae praeter poli eleuationem ascensionem rectam et declinationem stellae propositae datas esse requirit, ita instituitur.

Radio ZH pro lubitu assumto e centro Z describitur circulus HORW horizontem referens, et ducuntur duae eius sub angulis rectis se decussantes diametri HR, OW, quarum vna HR intersectionem planorum horizontis et meridiani hoc non proiecturam meridiani ipsam, altera OW autem sectionem communem planorum horizontis et verticalis primarii simulque proiecturam verticalis primarii ipsam exhibeat. Designatis deinde per §. 8. et 9. libelli saepius laudati ad datam poli eleuationem proiecturis aequatoris OQW et poli supra horizontem eleuati P, quem borealem ponimus, ducitur per §. 30. circulus BSD, proiectura circuli a stella proposita in conuersione mundi descripti, id quod ob notam stellae declinationem praestare in procliui erit. Fig. I. et II.

Vt iam locus, quem sol in ecliptica stella ortuum vel occasum quemque faciente tempt, inueniatur, describitur per §. 31. circulus PSM locum stellae S, quam, Fig. I. in horizonte ortiuo, Fig. II. in horizonte occiduo ponit, transiens et declinationis circulum repraesentans. Ab eius et aequatoris sectione M inde per §. 27. abscinditur versus occidentem arcus aequatoris MF, ascensionem rectam datam metiens, vt obtineatur punctum aequinoctii verni F. Per illud deinde se-

eundum praecepta §. 45. ducitur circulus FG proiecturam aequatoris WQO sub angulo obliquitati eclipticae aequali intersecans et eclipticam exhibens. Huius denique et horizontis intersectione L et G innotescunt loca solis quaesita, quorum illa, quae Fig. I. sistit, ad ortus veros, et L quidem ad matutinum, G vero ad vespertinum, ea autem, quae Fig. II. exhibet, ad occasus veros, L videlicet ad vespertinum, atque G ad matutinum, pertinent.

Sed temporibus ortuum et occasuum apparentium inueniendis per §. 30. proiiciuntur insuper circuli horizonti paralleli IVKT, in quibus sol eam depressionem attingit, quam habere debet, vt stella ad eandem cum ipso vel aduersam partem meridiani in horizonte posita conspici queat. Quo facto loca solis ortibus et occasibus visibilibus congruentia illorum circulorum et eclipticae intersectionibus T et V dantur, quae quorsum referenda sint, ex iis, quae modo attulimus, abunde patet.

§. IX.

Missis iam planisphaeriis, quandoquidem eorum vsum in soluendo problemate de temporibus ortuum et occasuum poëticorum stellae alicuius indagandis pro instituto nostro sat copiose exposuimus, ad problematis praedicti solutionem calculi subsidio pertexendam progredimur.

Methodus solutionis autem duplex est, prout stellae positio aequatoris vel eclipticae respectu datur.

Fig. I. In casu priori, in quo ascensio recta FM et declinatio SM dantur, ad punctum eclipticae L vna cum stella exoriens inueniendum in triangulo sphaerico SOM ad M rectangulo ex noto latere SM et angulo SOM, altitudini aequatoris aequali, quaerendum est latus OM, differentia ascensionalis stellae pro data habitatione. Hac ab ascensione recta FM in casu figu-

rae, quae ſtellam in hemiſphaerio polum eleuatum complectente collocat, ablata, innoteſcit aſcenſio obliqua ſtellae propoſitae FO. In triangulo FOL igitur dantur anguli FOL et OFL, quorum ille ſupplementum altitudinis aequatoris HOQ, hic obliquitas eclipticae eſt, vna cum latere comprehenſo FO. Inde inueniuntur latus FL, in caſu figurae, aſcenſionem obliquam FO quadrante minorem referentis, diſtantia puncti orientis L a puncto aequinoctii verni F, et angulus orientis FLO. Cognito autem puncto oriente habetur absque negotio locus ſolis ortui vero tam matutino quam veſpertino reſpondens. In triangulis deinde LXT, GVY ad X, Y rectangulis ex angulo orientis XLT = VGY et arcu viſionis XT vel YV eruendum eſt interuallum apparitionis LT vel GV, quod longitudini puncti orientis L additum locum ſolis T ortui matutino apparenti congruentem, a longitudine vero puncti ex aduerſo ſtellae occidentis G demtum locum ſolis V ortui veſpertino viſibili conuenientem praebet.

Prorſus eodem modo inueniuntur loca ſolis cum occaſibus ſtellae quum veris tum apparentibus coniuncta ex deſcenſione eius obliqua FW, quae in caſu ſtellae verſus polum eleuatum declinantis, quem figura exhibet, ſumma aſcenſionis rectae FM et differentiae aſcenſionalis MW eſt. Fig. II.

Hisce praefatis haud difficulter conſtare poteſt, ſi eleuatio poli dicatur φ, obliquitas eclipticae ε, aſcenſio recta ſtellae propoſitae α, declinatio eiusdem δ, differentia aſcenſionalis Δ, longitudo puncti eclipticae vna cum ſtella emergentis L et angulus orientis ϑ, haberi

$$\sin \Delta = \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{\cos \varepsilon \sin (\alpha - \Delta)}{\cos \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha - \Delta) - \sin \varepsilon \sin \varphi}$$

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha - \Delta)$$

Ad arcum L ope ſecundae formulae ex ſua tangente perfecte determinandum formulis modo prolatis adiungenda eſt aequatio

$$\sin \vartheta \sin L = \cos \varphi \sin (\alpha - \Delta)$$

in qua autem affectionem functionis ſin ϑ reſpectu ſigni noſſe oportet. Nec enim perpetuo angulus ϑ 180 gradibus minor eſt, neque ſemper poſitiuus manet ſeu perinde iacet, vt in figura, cui formulae praecedentes ſunt ſuperſtructae, ſed pro habitationibus zonarum frigidarum interdum negativus fit, interdum 180° excedit, ſemicirculo eclipticae, qui in zona frigida boreali ad auſtrum, in auſtrali ad boream vergit, infra horizontem cadente. Vt igitur in quolibet caſu anguli ϑ ſpecies, vtpote non ſatis functione cos ϑ determinata, pernoſcatur, in ſubſidium vocanda eſt declinatio puncti eclipticae culminantis, quae, ſi dicatur w, habemus

$$\begin{aligned} \text{tang } w &= \text{tang } \varepsilon \sin (\alpha - \Delta - 90^\circ) \\ &= -\text{tang } \varepsilon \cos (\alpha - \Delta) \end{aligned}$$

hinc

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{\cos \varepsilon}{\cos w} \sin (\varphi - w) \\ &= \frac{\cos \varepsilon}{\cos w} \cos (90^\circ - \varphi + w) \end{aligned}$$

atque ϑ erit ſimilis ipſi $90^\circ - \varphi + w$, quum hic arcus et angulus ϑ in triangulo rectangulo, a meridiano, horizonte et ecliptica formato, ſibi inuicem oppoſitantur.

In ſphaeris extra zonas frigidas minimus anguli ϑ valor eſt 0, maximus 180° graduum, vti facile deprehenditur: pro illis ergo ſin ϑ vsquequaque valorem poſitiuum habet, atque ſin L et ſin $(\alpha - \Delta)$ eodem ſigno affectos eſſe oportet, vt conſtet aequatio

$$\sin \vartheta \sin L = \cos \varphi \sin (\alpha - \Delta).$$

Eadem affectio functionis fin ϑ obtinet pro habitationibus zonae frigidae borealis, quando $\alpha - \Delta$ in altero vel tertio quadrante versatur, pro habitationibus zonae frigidae australis vero, cum $\varpi - \Delta$ in primo vel vltimo quadrante existit.

In his igitur casibus omnibus non necesse est, vt respiciatur ad arcum $90^\circ - \varphi + w$, sed supersederi potest computatione ipsius w. Quo autem computus secundum formulas supra datas commodius institui queat, adsumatur in auxilium angulus ζ eiusmodi, vt fit

$$\cot \zeta = \cot \varphi \cos(\alpha - \Delta) \text{ seu } \tang \zeta = \frac{\tang \varphi}{\cos(\alpha - \Delta)}$$

Quo reperto habetur

$$\tang L = \frac{\cos \zeta}{\cos(\zeta + \varepsilon)} \tang(\alpha - \Delta)$$

$$\cos \vartheta = \frac{\fin(\zeta + \varepsilon)}{\fin \zeta} \fin \varphi$$

$$\tang \vartheta = \frac{\cot(\zeta + \varepsilon)}{\cos L}$$

Longitudo puncti orientis L sic inuenta extemplo notas reddit longitudines, quas sol in ortibus stellae veris habet. Sunt eae nimirum L et $180^\circ + L$, quarum illa locum a sole occupatum stella ortum matutinum faciente, haec autem eundem stella ortu vespertino oriente determinat.

Posito nunc arcu visionis $= \gamma$, et interuallo apparitionis $= a$ erit

$$\fin a = \frac{\fin \gamma}{\fin \vartheta}$$

et longitudo solis in ortu stellae matutino apparenti $= L + a$, in ortu eius vespertino visibili autem $= 180^\circ + L - a$.

Vt longitudo puncti ecliptici cum stella cooccidentis, quam per L' designabimus, et angulus occidentis, quem ϑ' denotet, ex declinatione stellae obliqua $\alpha + \Delta$ inueniantur, opus tantummodo est animaduerti, ascensionem obliquam puncti ecliptici eodem momento, quo stella infra horizontem descendit, supra eum emergentis esse $180^\circ + \alpha + \Delta$, et longitudinem eiusdem $180^\circ + L'$. Quodsi ergo in formulis ortui conuenientibus in locum $\tau\tilde{\omega}\nu\ \alpha - \Delta$, L et ϑ' substituantur $180^\circ + \alpha + \Delta$, $180^\circ + L'$ et ϑ' respective, obtinebuntur eae, quae in occasum quadrant et ita sese habent

$$\text{tang } L' = \frac{\cos \varphi \text{ sin } (\alpha + \Delta)}{\cos \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha + \Delta) + \text{sin } \varepsilon \text{ sin } \varphi}$$

$$\cos \vartheta' = \cos \varepsilon \text{ sin } \varphi - \text{sin } \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha + \Delta)$$

aequatio autem hisce formulis ad perfectam ipsius L' determinationem adiicienda est

$$\text{sin } \vartheta' \text{ sin } L' = \cos \varphi \text{ sin } (\alpha + \Delta)$$

Species anguli ϑ' etiam hic diiudicari debet ex altitudine puncti ecliptici culminantis. Designata scilicet declinatione puncti illius per w', erit

$$\text{tang } w' = \text{tang } \varepsilon \text{ sin } (\alpha + \Delta + 90^\circ)$$
$$= \text{tang } \varepsilon \cos (\alpha + \Delta)$$

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \varepsilon}{\cos w'} \cos (90^\circ - \varphi + w')$$

atque ϑ' similis arcui $90^\circ - \varphi + w'$.

In sphaeris zonae torridae et vtriusque temperatae angulus ϑ' terminis 0 et 180° continetur: quare pro illis sin ϑ' semper valoris positiui est, eademque affectio functionis sin ϑ' locum habet pro habitationibus zonae frigidae borealis, quando $\alpha + \Delta$ in primum aut vltimum quadrantem incidit, pro habitationibus zonae frigidae australis autem quum $\alpha + \Delta$ in alterum aut tertium quadrantem cadit.

In caſibus modo memoratis neceſſe non eſt, rationem ipſius w′ haberi, ſed ſufficit angulum ϑ' per coſinum ſuum determinare.

Adſumto nunc in ſubſidium angulo μ huiusmodi, ut ſit

$$\text{tang } \mu = \frac{\text{tang } \varphi}{\cos (\alpha + \Delta)}$$

habetur

$$\text{tang } L' = \frac{\cos \mu}{\cos (\mu - \varepsilon)} \text{ tang } (\alpha + \Delta)$$

$$\cos \vartheta' = \frac{\text{ſin } (\mu - \varepsilon)}{\text{ſin } \mu} \text{ ſin } \varphi$$

$$\text{tang } \vartheta' = \frac{\cot (\mu - \varepsilon)}{\cos L'}$$

Longitudine puncti occidentis L' hoc pacto inventa, longitudo ſolis in occaſu veſpertino vero ſtellae propoſitae eſt idem ipſe arcus L', in occaſu matutino vero eius autem $180° + L'$.

Determinetur porro interuallum occultationis a' ope formulae

$$\text{ſin } a' = \frac{\text{ſin } \gamma}{\text{ſin } \vartheta'}$$

et longitudo ſolis in occaſu ſtellae veſpertino viſibili erit $L' - a'$, verum in occaſu matutino apparenti $180° + L' + a'$.

§. X.

Monſtrato hactenus, quomodo aſcenſione recta et declinatione ſtellae alicuius datis tempora ortuum et occaſuum poëticorum ipſius inueſtiganda ſint, transimus nunc ad commonſtrandum, qua ratione idem praeſtari poſſit, longitudine ac latitudine ſtellae datis, qui fuit caſus poſterior in §. praec. memoratus.

Fig. I. et II. Primum itaque in triangulo ſphaerico EPS ex datis lateribus ES, EP, quorum illud diſtantia ſtellae a polo eclipticae boreo, hoc diſtantia polorum ecliptiae et aequatoris eſt, atque angulo ab iis comprehenſo PES, diſtantia circuli latitudinis ſtellae et coluri ſolſtitiorum, quaerantur latus PS, diſtantia ſtellae a polo mundi et angulus poſitionis ESP. Tum in triangulo PSR ad R rectangulo ex latere PS, modo reperto et latere PR, eleuatione poli, inueniatur angulus PSR, qui in caſu Fig. I. ſtellam in horizonte ortiuo referentis, angulo poſitionis ESP auctus, in caſu Fig. II. autem ſtellam in horizonte occiduo exhibentis, eodem diminutus angulum ESR a circulo latitudinis et horizonte comprehenſum praebet. In triangulo denique LSN ad N rectangulo ex latere SN, latitudine ſtellae, et angulo LSN = ESR quaeratur angulus orientis vel occidentis SLN = HLG et latus LN, differentia longitudinum ſtellae et puncti orientis vel occidentis, qua cognita et ipſa longitudo puncti orientis et occidentis innoteſcit.

Solutio modo indicata, vocatis longitudine ſtellae λ, latitudine β, angulo poſitionis σ, et ſeruatis, quibus hucusque uſi ſumus, denominationibus, formulis comprehenditur iamiam in medium proferendis.

Inueniatur arcus auxiliaris u eiusmodi, vt ſit

$$\text{tang } u = \text{tang } \varepsilon \text{ ſin } \lambda$$

et erit

$$\text{ſin } \delta = \frac{\text{ſin } (\beta + u)}{\cos u} \cos \varepsilon$$

$$\cot \sigma = \frac{\cos (\beta + u)}{\text{ſin } u} \text{ tang } \lambda$$

$$\cos \sigma = \cot (\beta + u) \text{ tang } \delta$$

quibus formulis aequatio

$$\cos \delta \text{ ſin } \sigma = \text{ſin } \varepsilon \cos \lambda$$

ſubiungenda eſt, vtpote quae arguit, in ſignis deſcendentibus angulum poſitionis fieri negatiuum ſiue contra cadere, ac in aſcendentibus.

Denotatis nunc angulo, qui ab horizonte et declinationis circulo comprehenditur, per χ, arcubus vero, quibus longitudo ſtellae a longitudinibus puncti orientis et occidentis differt per d et d', habetur

$$\text{fin } \chi = \frac{\text{fin } \varphi}{\cos \delta}$$
$$\text{tang d} = \text{fin } \beta \text{ tang } (\chi + \sigma)$$
$$\cos \vartheta = \cos \beta \text{ fin } (\chi + \sigma)$$
$$\text{tang } \vartheta = \frac{\text{tang } \beta}{\text{fin d}}$$
$$L = \lambda - d$$
$$\text{tang d}' = \text{fin } \beta \text{ tang } (\chi - \sigma)$$
$$\cos \vartheta' = \cos \beta \text{ fin } (\chi - \sigma)$$
$$\text{tang } \vartheta' = \frac{\text{tang } \beta}{\text{fin d}'}$$
$$L' = \lambda + d'.$$

Quum vterque angulorum ϑ et ϑ' in ſphaeris zonae temperatae borealis intra limites 0 et 90°, in ſphaeris zonae temperatae auſtralis autem intra limites 180 et 90° contineatur, patet arcus d et d' poſitiuos aut negatiuos eſſe, prout pro illis latitudo β borealis aut auſtralis, pro his auſtralis aut borealis fuerit. Vnde colligitur, generatim in ſphaeris zonarum temperatarum ſtellam, quae latitudinem habet polo eclipticae eleuato cognominem, oriri cum eclipticae puncto antecedente, occidere cum ſequente: quae vero oppoſitam, oriri cum puncto ſequente, occidere cum antecedente. Haec regula tamen minime vniverſalis eſt, neque ad ſphaeras zonae torridae vel alterutrius frigidae extendi debet, in quibus ſtella aliquando

cum puncto eclipticae antecedente, aliquando cum ſequente, et oritur et occidit.

§. XI.

Poſſunt varia adhuc circa ortus occaſusque ſtellarum excogitari problemata, ſed eorum explicatio ad inſtitutum noſtrum non pertinet, ex quo ea tantum attingenda erant, quibus in ſequentibus lemmatum vice vti poſſemus. Redimus ergo, vnde exorſi ſumus, ad locum Virgilii §. II. laudatum et a nobis iam, vti inſcriptio huius ſcriptiunculae promittit, explicandum.

Quaeritur nimirum, quodnam ſit illud ſidus, quod Pleias occidens fugere, et qualis ſit ratio, ob quam id fugere, dicatur.

Priusquam ad ſatisfaciendum huic quaeſtioni accedamus, neceſſe eſt, vt videamus, quid verbum *fugere* ad ſidera translatum ſibi velit. Quod vt eruamus, inueſtigemus oportet ea aſtrorum phaenomena, in quibus aliqua fugae ſimilitudo ineſt.

Ac primum quidem hic nobis occurrit motus primi ſ. communis phaenomenon illud, quo ſidera quaedam aliis prius ad meridianum vel horizontem appelluntur, ideoque praecedunt, alteris ſubſequentibus. Qui tenor ab iis *perpetuo* ſeruatus fictioni fugae locum praebere poteſt, vt ſcilicet ſidus praecedens proxime inſequens et ſimul cum ipſo ſuper horizonte exiſtens fugere ab eoque fugari dicatur. Hoc reſpectu Aratus Leporem a Cane fugari, illumque hunc fugere perhibet, de iis ſic cantans:

Πεσσὶν δ' Ὠρίωνος ὑπ' ἀμφοτέροισι λαγωὸς
Ἐμμενὲς ἤματα πάντα διώκεται· αὐτὰρ ὅγ αἰεὶ
Σείριος ἐξόπιθεν φέρεται μετιόντι ἐοικώς,
Καί οἱ ἐπαντέλλει, καί μιν κατιόντα διώκει.

Phaen. 338 — 341.

vbi quidem cum ratione fugae aſtronomica phyſica ratio ex indole vſuque animalium aſtris nomen dantium petenda peropportune et mirifice congruit.

Eodem illo reſpectu Pleiades Orionem fugere finguntur ab Heſiodo verſibus hisce:

Εἰ δέ σε ναυτιλίης δυσπεμφέλου ἵμερος αἱρῇ,
Εὖτ' ἂν Πληϊάδες, σθένος ὄβριμον Ὠρίωνος
Φεύγουσαι, πίπτωσιν ἐς ἠεροειδέα πόντον —

Op. et D. 618 — 620.

Alterum phaenomenon, quod fugae ſpeciem praebet, eſt occaſus ſideris alicuius, oriente altero. Qui enim *ſemper* ſeſe occultat, quotiescunque alter comparuerit, is hunc vitare et fugere hicque illum terrere et fugare videtur. Duplici autem modo fuga in ſidus, quod oriente alio occidit, cadere poteſt, prout ſcilicet in hac translatione aut ad ortum occaſumque quotidianum aut ad poëticum reſpicitur. Priorem rationem ſecutus eſt Aratus in Scorpione Orionem de caelo fugante:

Ὅς καὶ ἐπερχόμενος φοβέει μέγαν Ὠρίωνα.

PHAEN. 636.

Emergente enim illo ſupra horizontem Graeciae hic infra eundem labitur, viciſſimque illum fugit.

Τοὔνεκα δὴ καὶ φασὶ περαιόθεν ἐρχομένοιο
Σκορπίου, Ὠρίωνα περὶ χθονὸς ἔσσατα φεύγειν.

Ibid. 646. 47.

Altera ratio obtinet in Virgilii loco

Vere fabis ſatio: tum te quoque, Medica, putres
Accipiunt ſulci, et milio venit annua cura,
Candidus auratis aperit quum cornibus annum
Taurus, et aduerſo cedens Canis occidit aſtro.

GEORG. I. 215 — 218.

vbi Canis occaſum veſpertinum faciens Tauro circa idem anni tempus ortu matutino orienti cedere, fiue, quod eodem recidit, ipſum fugere dicitur.

Explorato ſenſu, vt ita dicam, aſtronomico tribuendo formulae de fidere fugiente aliud, enumeratisque variis, quibus ea applicari poteſt, caſibus, quaeſtionem ſupra expoſitam adgredi iam licet.

Principio igitur manifeſtum eſt, neque primum neque alterum caſuum, in quibus fuga aſtris affingi poteſt et ſolet, hic obtinere. Quum enim omnia aſtra a piſcibus denominata eam poſitionem in coelo teneant, vt Pleiadas in motu communi praecedant, neque vllum eorum, Pleiadibus ſub horizontem deſcendentibus, aut ad occaſum vergat, aut ſupra horizontem aſcendat, Pleias Piſcem non eo reſpectu fugere dici poteſt, quo eadem ab Heſiodo Orionem, vel Orion ab Arato Scorpionem fugere praedicatur. Tertius ergo caſus ſolus ſupereſt, in quo ortus et occaſus poëticus aſtri fugantis et fugientis ſpectatur, et quem eo facilius et libentius quivis hic admiſerit, quod exemplum eius iam in loco Virgilii modo prolato habuimus.

Neceſſe itaque eſt, Piſcis fidus, quod Pleias occidens fugere dici poſſit, ſic in coelo collocatum eſſe, vt ortus eius veſpertinus (matutinus enim ex iis, quae modo dicta ſunt, excluditur) ſuper horizonte Romano circa idem fere anni tempus contingeret, quo occaſus matutinus Pleiadis eueniebat. Praeterea res ipſa poſtulare videtur, vt fidus illud ex eorum numero ſit, quae aliquam apud veteres in deſcribendis temporibus ſignificandisque tempeſtatibus nacta ſunt celebritatem.

Hisce requiſitis nullum fidus piſcis nomine inſignitum magis reſpondere inuenitur, quam Piſcis notius a Seruio iam hic repertus. Primum enim ortus eius veſpertinus ſuper horizonte Romano praecedebat occaſum matutinum Pleiadis ſpatio temporis haud admodum longo et ei fere aequali, quod inter apparentias Tauri et Canis loco proxime citato memoratas intercedebat, adeo vt Pleias matutine occi-

dens Piſcem notium veſpertino ortu orientem fugere ex Virgilii ratione recte dici queat. Deinde Piſcis notius eſt inter illa ſidera, quorum prae aliis veteres in ἐπισημασίαις ſ. tempeſtatum ſignificationibus rationem habuerunt, vti ex Ptolemaei libro *) *de apparentiis ſtellarum inerrantium* patet, in quo lucidae Piſcis notii ortus et occaſus ad ſolem relati, addito ſimul eorum ex Euctemonis **) Hipparchi, Caeſaris et aliorum obſeruationibus ſignificatu, diligenter notati ſunt.

Quantumuis egregie haec conſpirent ad perſuadendum, Virgilium, quum Pleiada Piſcem fugere caneret, Piſcem notium in mente habuiſſe eumdemque intelligi voluiſſe, attamen dubium ſuboriri poſſit, num Piſcis ſimpliciter de Piſce notio dici queat. Verum enim vero quum Piſcis notius ſolitarius quaſi et plane ſeiunctus ſit a geminis iſtis in zodiaco poſitis,

---

*) Edito a Petavio in *Vranologio*, quod primum ſeparatim Pariſ. 1630 prodiit, deinde in Tom. III Operis *de Doctrina Temporum* Amſtelod. 1703 recuſum eſt. Introductionem Ptolemaei, quam Petauius praetermiſerat, et varias lectiones e codice Saviliano deſcriptas publicauit Fabricius *Biblioth. Graec.* Lib. IV. c. XIV.

**) Metoni, celebri ἐννεακαιδεκαετηρίδος ſ. cycli vndeuiginti annorum conditori coaeuus. Inſtituerunt autem aſtronomi poſt Metonem, vti refert Theon ad Arati Dioſ. vſ. 20., tabulas Gemino (*Iſagog.* c. 14) et Vitruvio (Lib. IX. c. 7) παραπήγματα (quod poſſis reddere *affiches*) dictas in publicum proponere, in quibus de ſingulis annis periodi nouemdecennalis prognoſtica, interque ea aëris mutationes inſigniores cum ortibus et occaſibus ſiderum coniunctas, in vſum vitae, agriculturae inprimis et rei nauticae (cf. Achillis Tatii *Iſagog.* in Arat. art. 39) euulgabant. Ex his parapegmatis dein ſcriptores rei ruſticae libris ſuis, quantum in rem eſſe ipſis viſum fuit, inſeruere.

ille omnino intelligendus eſt, vbi de piſce, tamquam aſtro, ſingulari numero tantum fit mentio, niſi adiuncta aliud ſuadeant. Comprobatur hoc tum loco Manilii:

At quum ſe patrio producet ab aequore Piſcis,
In caelumque ferens alienis finibus ibit; reliq.

ASTRON. V. 394 et ſeqq.

tum etiam Ovidii

— — *Quotiesque repellit*
Ver hiemem, Piſcique Aries ſuccedit aquoſo.

METAM. X. 165.

In illo enim de notio Piſce agi, inde manifeſtum eſt, quod alibi iam (IV. 574) de influxu piſcium geminorum in horoſcopo conſtitutorum in recens natos fuit ſermo: hunc vero vt de alterutro piſce in zodiaco collocato explicemus, facit commemoratio Arietis, ſideris, quod et ipſum in zodiaco poſitum Piſci utique ſuccedit. Adde, quod Aratus ad Piſcem notium deſignandum nudo Ἰχθύος vocabulo vſus eſt, dum, *Cancro exoriente*, inquit:

Δύνει μὲν Στέφανος, δύνει δὲ κατὰ ῥάχιν Ἰχθύς.

PHAEN. 572.

vbi in Ciceronis et Germanici Phaenomenorum verſionibus pro Graeco Ἰχθὺς ſolum Latinum *Piſcis* legitur. At locum de Piſce notio exponere, ratio ab Arato in deſcribendo ſiderum ortu et occaſu inita (cf. verſ. 559 — 568), modusque occidendi ipſe, verſ. 575 et 76 depictus, iubent. Quocirca inter ſidera, quae Cancer exoriens obſcurat ſiue ad occaſum impellit a Feſto Avieno (Arat. Phaen. verſ. 1081) *Auſtri incola*, *Piſcis* ab Hygino autem (Aſtron. IV. 12.) diſerte *Piſcis notius* nominatur. Ne quis vero aliquid poëtici modo, quo vocabulum Ἰχθύος adhibuit Aratus, ſubeſſe opinetur, obſtant eiusdem vſus exempla apud ſcriptores proſaicos, veluti Eratoſthe-

nem. Hic enim ſuae Piſcis notii deſcriptioni (*Catasteriſm.* c. 38) nil niſi verbum Ἰχθύς praemiſit, et ſimiliter Pſeudoeratoſthenes apud Petauium in Vranolog. vocabulum iſtud ſine vllo appoſito bis (p. 258 C et p. 259. A) de notio Piſce uſurpauit.

Reſtat difficultas adhuc tollenda in adiecto epitheto *aquoſi*. Sed ſi accipiatur pro imbrifero, aquas denuntiante, id quod vſui dicendi conuenit, admodum eximie in Piſcem notium quadrat.

Nam in Ptolemaei libro ſupra laudato ortus lucidae Piſcis notii tam veſpertinus hic poſtulatus *), quam matutinus **) occurrit cum ſignificatu pluuiae et ſtillantis imbris, adeo vt iſte piſcis iure meritoque a Virgilio pluuiam denuntians praedicari potuerit. Haec Piſci notio adtributa poteſtas, in ortu ſuo imbres ciendi, eſt quoque cauſa, cur poëta Pleiada iſtud ſidus vitantem repraeſentauerit. Etenim quum ipſa munere perfungeretur ortu ſuo primam aeſtatis partem, amoeniſſimum anni tempus, annunciandi et quaſi adducendi, Piſcem notium, qui hiemis et caeli pluuii triſtis nuncius exiſtebat, non potuit non auerſari: quare in ortu eius ſeſe recipiebat, triſtiorque ipſa in hibernas vndas deſcendebat.

§. XII.

Nihil iam reſtat, quod ad confirmandam explicationem, quam huc vsque tradidimus, adhuc addi

---

*) Is in parallelo horarum XV i. e. ſub eleuatione poli 40° 56′ ſecundum Ptolemaeum die XIX menſis Thoth, cui in Calendario Romano reſpondet XVI Cal. Octob., eueniebat.

**) Vid. quae ad diem XVIII menſis Pharmuthi i. e. Id. April. et ad diem IX menſis Pachon i. e. IV Non. Mai. adnotata ſunt.

poſſit, quam indicium temporum, quibus apparentiae Tauri, Canis et Piſcis in duobus Virgilii locis memoratae ſuper horizonte Romano i. e. ſub eleuatione poli 41° 54′ primo anno Iuliano, ad quem fine dubio Caeſaris conſtructum erat parapegma *), contingebant. In iis autem computo eruendis hoc modo verſatus ſum. Longitudines ſtellarum e catalogo Mayeriano ſubductis 25° 32′ 8″, quibus aequinoctia ab anno 45, a. C. inde vsque ad annum 1800 p. C. ſecundum calculos Ill. Zachii retroceſſerunt, deduxi, latitudines earum vero e Ptolemaei catalogo deſumere, quam e recentiori aliquo, correctione ob mutatam eclipticae obliquitatem adhibita, deriuare malui. Obliquitatem denique eclipticae primo anno Iuliano conuenientem itidem ex Ill. Zachii ratione ſtatui = 23° 44′. Sic ſequentes obtinui valores quantitatum ſupra deſignatarum:

Pro lucida Pleiadum.	Pro Cane maiori.	Pro lucida Piſcis notii.
♑ = 31° 40′	= 75° 48′	= 305° 30′
β = 3 40 B**)	= 39 10 A	= 23 0 A
♪ = 15 38 B	= 16 5 A	= 41 15 A
σ = 20 50	= 5 54	= 18 7
χ = 43 54	= 44 2	= 62 39

Ex hisce valoribus ortui et occaſui communibus derivantur ſequentes determinationes:

---

*) Caeſaris libros *de aſtris* laudant Macrobius Saturn. Lib. I. c. 16. et Plinius in indice libri XVIII: illis vero parapegma intextum vel annexum fuiſſe demonſtrant ea, quae Plinius Libr. XVIII, et Ptolemaeus in libro ſupra allegato inde proferunt.

**) Petita eſt haec latitudo ex μεγάλ. συντάξ. libr. VII. c. 3.

Pro ortu lucidae Pleiadum.	Pro ortu lucidae Piſcis notii.	Pro occaſu lucidae Pleiadum.	Pro occaſu Canis maioris.
d = 7° 43′	= — 67° 24′	d′ = 1° 34′	= — 26° 22′
☾ = 23 57	= 12 54	☾′ = 33 14	= 49 26
☽ = 25 31	= 24 41	☽′ = 66 59	= 61 24

Statuto nunc arcu viſionis pro ſtellis primae magnitudinis, quando ad easdem partes meridiani cum Sole conſtitutae ſunt, = 12°, pro ſtellis tertiae magnitudinis autem ſub eadem conditione = 14°, invenitur pro Cane a′ = 13° 42′, pro lucida Pleiadum vero, a = 34° 10′. Hinc locus ſolis in occaſu Canis veſpertino apparenti incidit in 5° 44′ ♉, in ortu lucidae Pleiadum matutino viſibili in 28° 7′ ♉. Illum occupabat ſol III. Cal. Mai. hunc XI. Cal. Iun. Prior determinatio prope congruit cum illa, quam Ptolemaeus in libro antea laudato exhibet. Namque ſecundum ipſum Canis in parallelo horarum XV i. e. ſub eleuatione poli 40° 56′, a qua altitudo poli Romae haud multum diſtat, die III menſis Pachon i. e. IV Cal. Mai. abſconditur *). Poſterior determinatio comparationem non inuenit, quia Ptolemaeus Pleiadum apparentias neglexit **).

Ex tabella praecedenti deriuantur porro absque negotio tempora ortus veſpertini veri lucidae Piſcis notii nec non occaſus matutini veri lucidae Pleiadum. Ille ſcilicet eueniebat Sole in 12° 54′ ♎ exiſtente, hic

*) Plinius (Libr. XVIII. c. 29) Canem eodem die, quo Ptolemaeus, occidere tradit, Columella (Lib. IX. c. 2) eum Pridie Cal. Mai. ſe veſpere celare dicit.

**) Plinius (Lib. II. c. 47) exortum Vergiliarum in 25° ♉ (totidem partibus Tauri, quot antea Aquarii nominatae) fieri perhibet; errat autem in tempore inde eliciendo. Ponit enim ex falſa, quam Lib. II. c. 19. et Lib. XVIII. c. 25 tradit opinione, aequinoctia et ſolſtitia fieri in octauis partibus ſignorum, VI Id. Mai. loco XIV Cal. Iun.

eodem verſante in 3° 14′ ♏; quibus locis reſpondent VIII Id. Octobr. et V Cal. Nouembr. Dies poſtremo nominatus idem ipſe eſt, qui a Varrone et Columella occaſui matutino Pleiadum adtribuitur, et quem Virgilium etiam reſpexiſſe probabile eſt.

Quodſi iam ponamus, eum pariter de vero ortu Piſcis notii cogitaſſe, quum veteres ἐπισημασίας ſuas non minus crebro ad veros ortus et occaſus, quam ad viſibiles direxerint, idem fere temporis interuallum inter apparentias Pleiadis et Piſcis notii ac inter φάσεις Tauri et Canis interponitur. Verum nec differentia euadit magni momenti, ſi poëta ortum veſpertinum apparentem in mente habuiſſe dicatur. Nam ſtatuendo arcum viſionis pro ſtellis primae magnitudinis, quum ſoli ex aduerſo poſitae ſunt, = 8°, reperitur pro lucida Piſcis notii a = 19° 29′; proinde ortus eius veſpertinus viſibilis eueniebat ſole in 23° 25′ ♍ haerente i. e. XIII Cal. Octobr. ſ. die XXII menſis Thoth: quae determinatio paullum recedit a ratione Ptolemaei, eidem ortui in parallelo horarum XV diem XIX. menſis Thoth aſſignantis.

Vtracumque tandem ſententia de ortu Piſcis notii palmam tulerit, illud tamen certum eſt, Piſcem notium Romae, die quo occaſus matutinus Pleiadum fiebat, veſperi ſupra horizontem ortiuum haud multo eleuatum ſeſe oſtendiſſe, id quod ad dicendum, Pleiadem ab ipſo fugari, ſufficit.

§. XIII.

Priusquam huic commentationi finis imponatur, ne quid in ea deſideretur, haud ab re fuerit, virorum doctorum, qui in explicando, circa quem noſtra verſatur opella, loco, diuerſam ab hic propoſita rationem ſecuti ſunt, ſententias exponere. Tentarunt autem varios difficultatis, quam ſibi reperire viſi ſunt, tollendae modos, quos ordine recenſebimus. Quidam igitur

ex iis, fugam dumtaxat fideri, aliud in motu occaſuque diurno anteuertenti, adtribui putantes, quoniam eo pacto fugam in Pleiadem, vt quae Piſcem notium non praevertat, verum ſubſequatur, non cadere intellexerunt, aut locum omnino *inextricabilem* pronuntiarunt, itaque nodum diſſecarunt potius quam ſoluerunt, ſicut Petauius *) et Kaeſtnerus **), aut Piſci notio aliud ſidus Pleiada in motu diurno ſequens et ab aqua denominatum ſubſtituerunt, quemadmodum Ruaeus, qui Hydram huc intruſit, aut denique Petauii et Kaeſtneri, virorum in rebus mathematicis exercitatiſſimorum, auctoritate inducti ab omni explicatione e re aſtronomica petenda abſtinuerunt, lucem loco ex poëticis rationibus quaerentes, vti noſtrates Heynius ac Voſſius. Alii verba Seruii ſuper loco noſtro ad ortum occaſumque generalem ſ. diurnum trahentes, quum nec ſic Pleiadem a Piſce notio fugari ipſumque viciſſim fugere dici poſſe animaduerterent, ſiderum eorum, quae occidente Pleiade oriuntur, vnum vel alterum, cui quodammodo nomen piſcis indi poſſit, Piſcis notii locum capere iuſſerunt, veluti Delphinum aut Scorpionem, quorum ille a Muſonio atque de la Cerda, hic a Drydenio in ſubſidium vocatus eſt. Tandem nuperrime Horsleius libello ſingulari de duobus temporibus mellationi a Virgilio conſtituti commentatus ***), verſ. 234 et 235 ortum Pleiadi

*) Variar. diſſertatt. ad Vranolog. Lib. II. c. 9.

**) In epiſtola de loco noſtro ad Heynium ſcripta quae in huius tert. edit. Virgilii Tom. I. p. 638 extat. Quae ex Riccioli Almageſto adduxit, paullulum detorſit vir alioquin perſpicaciſſimus, Ricciolo ſententiam perabſurdam affingens.

***) On Virgil's two Seaſons of Honey .... by Samuel Horsley. Lond. 1805. Vid. relat. in diario litterario Goettingenſi 1807. 18. Stück.

vesperti num s. acronychum indicari et per sidus Piscis aquosi alteratum piscium geminorum, quorum ortus matutinus s. heliacus Romae circa idem fere tempus ac occasus modo commemoratus Pleiadis contingebat, significari censet.

In refellendis hisce opinionibus non est, quod multi simus. Pauca quaedam tantum admonuisse sufficiet. Deerrarunt a vera explicationis via viri docti, quum non modo omnes casus supra euolutos, in quibus fuga sideri alicui potest et solet adscribi, ante oculos non habuerint, verum etiam locum alterum, in quo Virgilius apparentias Canis occidentis et Tauri emergentis eodem respecta coniunxit, vt altero occasum Pleiadis et ortum Piscis, in comparationem adhibere neglexerint. Hic enim iam ab Hartmanno Beyer *), Maestlino **) atque adeo ab illis ipsis viris recte expositus, poterat ac debebat eos in viam reducere. Ceterum sua quaeque interpretationum prolatarum premitur difficultate. Sic, qui Delphinum sub Piscis nomine intelligi voluit, rationem situs sphaerae, qui Romae obtinet, non habuit. Horsleii sententiae, ex qua mellatio altera itidem in tempus vernum incideret, obstant *hibernae vndae*, in quas Pleias descendere praedicatur, id quod et ipse vir doctissimus sensit, et frustra conatus est diluere.

---

*) Quaestion. in libellum de Sphaera Joan. de Sacro Busto. Francofurti 1556. p. 149.

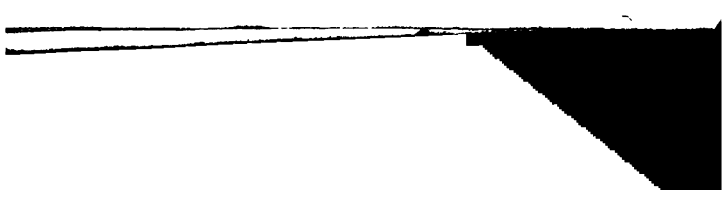
**) Epitom. Astronom. Tubingae 1610 (ed. alt.) p. 254.

II.

DE INSCRIBENDO TRIANGVLO SPECIEI AC MAGNITVDINIS DATAE IN CIRCVLVM POSITIONE ET MAGNITVDINE DATVM:

AD EXPLANANDVM

LOCVM IN PLATONIS DIALOGO, QVI INSCRIBITVR MENO, p. 86. e. — p. 87. b.



Socrates eo, quem titulus indicat, loco quaeſtionem, vtrum virtus doceri poſſit nec ne, geometrarum more, adſumta quadam de vi atque natura virtutis hypotheſi, tractaturus, vt Menonem huic diſputandi generi praeparet, exemplum e Geometria depromtum adfert, in quo ſcilicet, quid ſit ex hypotheſi conſtruere, demonſtret, quodque his continetur verbis ipſius:

λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνταί, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτοὺς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι.

Ante omnia animaduerti conuenit, hic non de modo ſoluendi problematis alicuius, ſed potius de poſſibilitate ſolutionis quaeri. Ea autem inueſtigatur analyſi, i. e. fingendo, factum iam eſſe, quod faciendum proponitur, atque per ea, quae inde conſequuntur, progrediendo, donec perueniatur ad aliquid, quod in poteſtate ſit. Hac ratione deteguntur ſimul caſus, in quibus propoſitum fieri poteſt, in quibus non, quorum diſtinctio et enumeratio apud Graecos geometras διορισμὸς *) audit.

Quod iam ad quaeſtionem geometricam a Socrate exempli gratia allatam attinet, illa definirl poſtulatur, num datum triangulum dato circulo queat inclu-

*) Vid. Pappi Collect. mathem. libr. VII. praef. — Secundum Proclum (comment. in Libr. prim. Euclid. p. 19) Leon εὗρε διορισμὸν, πότε δύνατόν ἐσι τὸ ζητούμενον πρόβλημα, καὶ πότε ἀδύνατον.

di, h. e., ei ſic applicari et ſuperponi, vt verticibus angulorum trianguli in circumferentiam circuli cadentibus quodlibet trianguli latus parti peripheriae ſubtendatur.

Vt eruatur conditio, ſub qua problema de inſcribendo triangulo datae magnitudinis circulo dato generaliter acceptum ſolutionem inuenit, contemplemur triangulum quodcumque ABC, cuius latera angulis A, B, C ſubtenſa comparate dicantur a, b, c, et quod circulo, cuius radius per r deſignabitur, inſcriptum ſit. Quodſi iam diſtantia centri circuli a medio baſis, quam ſumamus latus b eſſe, dicatur z, perpendiculum autem e vertice trianguli B in baſin demiſſum h, habetur ſegmentis baſeos perpendiculo diviſae per f, g denotatis

I) $ff + hh = aa$

II) $gg + hh = cc$

III) $f + g = b$

IV) $rr = \frac{1}{4}bb + zz = (f - \frac{1}{2}b)^2 + (h - z)^2$
$= (\frac{1}{2}b - g)^2 + (h - z)^2.$

Ex IV) efficitur

1) $2hz = ff + hh - bf$

2) $2hz = gg + hh - bg$

quibus aequationibus additis fit

$4hz = 2hh + ff + gg - b(f+g)$
$= 2hh + ff + gg - (f+g)^2$ (III.)
$= 2hh - 2fg$

ſiue $2hz = hh - fg$

hinc $z = \frac{hh - fg}{2h}$

et $zz = \frac{h^4 - 2fghh + ffgg}{4hh}$

proinde $rr = zz + \frac{1}{4}bb$
$= zz + \frac{ff + 2fg + gg}{4}$

$$= \frac{h^4 + ffhh + gghh + ffgg}{4hh}$$

$$= \frac{(hh+ff)\,(hh+gg)}{4hh}$$

$$= \frac{aacc}{4hh}$$

et $r = \frac{ac}{2h}$

vnde eſt $2r \times h = a \times c$.

Ad inſcribendum igitur triangulum datae magnitudinis circulo dato requiritur, vt rectangulum, quod ſub diametro circuli et perpendiculo ab aliquo trilateri angulo in latus ſubtenſum demiſſo continetur, aequale ſit rectangulo ſub lateribus angulum iſtum comprehendentibus contento *).

Hinc deriuantur absque negotio determinationes diuerſis triangulorum generibus competentes.

1) Si datum triangulum fuerit rectangulum eiusque hypotenuſa b, erit $aa + cc = bb$.

i. e. ob I) II) et III) $ff + gg + 2hh = ff + 2fg + gg$

hinc $hh = fg$

et $aa = ff + fg = bf$, $cc = gg + fg = bg$

ergo $aacc = bbfg = bbhh$, $ac = bh$

atque $r = bh : 2h = \frac{1}{2}b$.

*) Demonſtratio mere geometrica huius theorematis ſi deſideretur, ſignetur punctum, in quo perpendiculum baſi occurrit, D et alter finis diametri, E, iungaturque recta AE. Quo facto triangulum ABE triangulo BDC ob angulos EAB, BDC rectos et angulum AEB (Elem. III. 21) aequalem angulo BCA aequiangulum erit, quare (Elem. VI. 4) BD : BC = BA : BE, quae eſt ipſa theorematis enunciatio. — Vid. The elements of Euclid by Robert Simſon B. VI. Prop. C. Thom. Simpſon's Elements of Geom. B. III. Theor. XXV. Legendre Eléments de Géom. Liv. III. Prop. XXXII.

Oportet igitur, diametrus circuli, cui datum triangulum rectangulum inſcribendum eſt, hypotenuſae aequalis ſit, quae quidem determinatio ex notiſſima propoſitione, qua angulus in ſemicirculo rectus eſſe demonſtratur *), ſponte conſequitur.

2) Sit datum triangulum aequicrurum, baſin habens b. Quia igitur $a = c$, eſt

$$2r = \frac{aa}{h}$$

Vtrumlibet ergo crurum aequalium media proportionalis eſt inter perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum et diametrum circuli datum triangulum circumſcribentis. Recta igitur in alterutra baſis extremitate ad perpendiculum cruri adiacenti inſiſtens, vbi producta fuerit, ſecat perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum itidemque productum in altero diametri fine, cuius rei ratio facile ex propoſitione ſub nr. 1. commemorata deducitur.

3) Si datum triangulum aequilaterum ſive $a = b = c$ ſit, habetur ex I) et II)

$$f = g$$

et ex III) $f = g = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} a.$

hinc $hh = aa - ff = \frac{3}{4} aa$

et $h = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$

proinde $r = \frac{aa}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

ſive $rr = \frac{1}{3} aa.$

Radius ergo circuli, cui datum triangulum aequilaterum inſcribendum eſt, potentia ſubtriplum ſit lateris trianguli, neceſſe eſt **). Huius determinationis ratio haud difficulter etiam ex eo, quod ſub nro. 2. de invenienda diametro circuli triangulum aequicrurum includentis annotauimus, intelligitur.

---

*) Elem. III. 31. **) Elem. XIII. 12.

Agedum videamus iam, quomod
crates vel potius Plato disputantem int
metres quaestionem propositam tractet.
sermone, cuius initium supra positum el

εἴποι ἄν τις, ὅτι οὔπω οἶδα, εἰ ἔστ
τον· ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν
μαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε·
τὸ τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν
τοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν
ρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ το παρατεταμένον
συμβαίνειν μοι δοκεῖ· καὶ ἄλλο αὖ, εἰ
ταῦτα παθεῖν.

Quicunque verborum εἰ μὲν ἔστ . .
fas, id tamen satis patet ac perspicuum
in iis omnino mentionem fieri radii vel
coli expositi, sed omnia ad datum trian
Hinc efficitur, verbis istis non efferri
sub qua datum triangulum dato circ
liceat, sed proprietatem quandam, alio
tum generi conuenientem enunciari, id
quoque poscit, si quidem exemplum
eam facere debeat. Geometer igitur a
ductus determinationem, quam supra
triangulorum speciebus demonstratam de
rat, nec nisi certa de trianguli genere h
sumta definire scit, an datum triangulu
culo circumcludi possit: quod quidem v
sequuntur, ὑποθέμενος μὲν οὖν . . . . εἴτι
diffime confirmatur.

Res nunc eo est deducta, vt indag
nam sit illa proprietas, quae vtrum da
competat nec ne, ante scire cupit geo
tonicus, quam quaestionem sibi propos
Inquiramus ergo in eius verba paullo di

Ac statim quidem in promtu est con
metram de re geometrica loqui scienter, l

ſolemnibus; at quum bene monente Kaeſtnero *) ipſe Euclides in elementis vtatur orationis genere, quod non multum a vulgari conſuetudine ſermonis recedat, ratio loquendi a geometra Platonico in familiari colloquio vſurpata multo propius ad quotidianum ſermonis uſum accedere putanda eſt. Et quamquam Euclides ſupra centum annos poſt Platonem vixerit, licebit tamen vtriusque locutiones illuſtrandi gratia inter ſe conferre, dummodo, ne id ad ſingula verba pertineat, caueamus. Eo enim modo inſtituta comparatio errori foret obnoxia, quod ex his, quae iam ſubiicientur, manifeſtum fiet.

Plato, vti Sauilius in praelectionibus in principium elementorum Euclidis Oxonii habitis **) refert, punctum, quod apud Euclidem σημεῖον audit, στιγμὴν vocat, vocabuloque ἐπιπέδου vbique fere generalem ſubiicit ſignificatum ſuperficiei, quam quidem Euclides ἐπιφάνειαν dicit, illo verbo ad deſignandum planum vſus. Quin in eo ipſo, cui locus noſter ineſt, dialogo recta linea vocatur ſimpliciter γραμμή, quam cum Euclide magis definite diſtinoteque εὐθεῖαν appellaueris, atque in loco, quem tractamus, de figura circulo inſcribenda ἐντεῖνειν occurrit, pro quo Euclides ἐγγράφειν habet. Illud nimirum eo ſpectat, vt figura loco mota circulo ſuperponatur vel ſuperponi cogitetur, hoc ad deſcriptionem eius in circulo pertinet. Atque in univerſum vocabula Platonica ſenſibus magis, quam Euclidea, accommodata reperies.

Sed vt ad propoſitum reuertamur, ex eo, quod

*) Ueber Kunſtwörter in Eberhardi diario: Philoſophiſches Magazin B. IV. S. 257 u. folg.

**) Cf. quae inde Kaeſtnerus excerpſit Geſch. der Math. B. 3. S. 19 u. folg. — Prauum vocabuli ἐπιπέδου vſum arguit iam Proclus ad Elem. I. def. 7. pag. 32. Commentar.

Plato ἐντείνειν eodem respectu, quo Euclides ἐγγράφειν, posuit, procline est colligere, quid sit παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμήν (praetendere figuram datae lineae). Ad descriptionem figurae nimirum refertur, et nihil aliud esse potest, quam quod Euclides per παραβάλλειν σχῆμα (vel εἶδος) παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν *) (proiicere figuram ad vel iuxta datam rectam) extulit, et ipsius interpretes *applicare figuram ad* vel *secundum datam rectam* reddiderunt. Dicitur autem figura, inprimis parallelogramma, applicata ad datam rectam, quando super ea, tamquam basi vel latere, constructa est. Eadem quoque a Menechmo παραπεῖσθαι παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν praedicatur **), apud quem χωρίον παραπείμενον παρὰ τὴν γραμμὴν ergo idem valet, ac χωρίον παρατεταμένον vel παραβαλλόμενον παρὰ τὴν γραμμήν. Est vero applicatio spatiorum frequentis vsus ***) et geometris inde a Pythagoreorum temporibus perquam familiaris, vti testatur Proclus †), cuius ea de re verba hic apposuisse haud alienum ab instituto erit, quae sic sese habent. Ἔστι γὰρ ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥτε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. — ὅτ' ἂν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον παρά τῇ εὐθείᾳ συμπαρα-

*) Elem. I. 44.

**) Apud Eutocium in Commentar. in Archimedis lib. II. de Sphaera et Cylindro p. 18 edit. Basileenf. et p. 142. edit. Oxonienf.

***) Vid. Robert Simfon ad Elem. VI. 28 et 29, qui ob omiffas, tanquam nullius vfus, has propofitiones grauiter editores quósdam reprehendit.

†) Ad Elem. I. 44. pag. 109.

βαλεῖν *) ἐκεῖνο τὸ χωρίον **) φασὶν, ὅτ' ἐὰν μεῖζον δὲ ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅτ' ἐὰν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γεγραμμένου εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐντὸς, τότε ἐκλείπειν· καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως· i. e. secundum translationem Francisci Barocii: Antiqua quidem sunt haec, aiunt Eudemi familiares***), Pythagoricaeque Musae inuenta, applicatio vtique spatiorum, et excessus atque defectus. — Quum enim, proposita recta linea, datum spatium toti rectae coaptaueris, tunc spatium illud applicari dicunt: quum vero spatii longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere, quum autem minorem, ita vt spatio descripto aliqua extra sit rectae lineae pars, tunc deficere. Et hoc modo Euclides in sexto libro tum excessus, tum defectus mentionem facit.

Propositiones libri sexti, in quibus Euclides defectus atque excessus mentionem facere a Proclo perhibetur, sunt 27, 28 et 29 †). Ex duabus prioribus videre est, quid sit in loco nostro ἐλλείπειν χωρίῳ τινί. Quum enim apud Euclidem habeatur ἐλλείπειν εἴδει παραλληλογράμμῳ, quod valet deficere parallelogrammo, sensus formulae ἐλλείπειν χωρίῳ τινὶ obuius est. Verbum ἐλλείπειν in ea, sicut Latinum

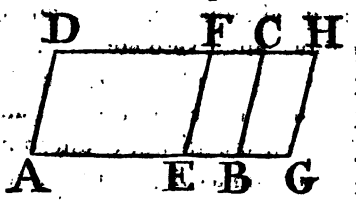
*) Num forte ex sequentibus subaudiendum vel supplendum ποιήσῃς?

**) Lacuna hic obuia per παραβάλλεσθαι explenda videtur.

***) Rectius sine dubio Commandinus ad Elem. I. 44 vertit: vt ait Eudemus. Hic enim historiam geometriae composuerat.

†) In datis quoque defectus et excessus mentio fit, prop. 58 et 59.

deficere, passiuam significationem habet, cuius vsus passim extant exempla *). Contrarium eius ὑπερβάλλειν χωρίου τινί est excedere spatio aliquo. Quo autem melius intelligatur ratio defectus atque excessus illius, haud inconsultum fuerit, eam paullo accuratius explicare, praesertim quum inde haud parum lucis loco, circa quem versamur, affundatur.



Quando igitur parallelogrammum AEFD super recta AB sic constitutum est, vt basis eius AE totam rectam AB non exaequet, sed tantummodo pars sit illius, tunc quidem parallelogrammum AEFD ad rectam AB applicatum dicitur, verum cum defectu, qui et ipse parallelogrammum est, videlicet BEFC, quod cum priori AEFD latus EF commune et basin suam BE basi prioris AE in directum adiectam cumque illa totam rectam AB conficientem habet. Quum autem parallelogrammum AGHD super recta AB constitutum parte BG baseos AG supereminet rectam AB, etiam tum parallelogrammum AGHD ad rectam AB applicatum dicitur, sed cum excessu, parallelogrammo scilicet BGHC, cui latus BC cum parallelogrammo excedente AGHD commune est, basis vero pars illa BG, quae a basi prioris AG ablata rectam AB relinquit.

Hisce declaratis verba: εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον ..... si accusatiuus παραπεινοντα **) pro casu absoluto habeatur, Latine sic reddenda sunt:

---

*) Hogeveen ad *Viger.* pag. 189. Notanda est constructio cum datiuo, cuius exempla in lexicis desiderantur. cf. tamen Matthiae Gramm. §. 404. p. 549.

**) Sequor Gedikium, qui accusatiuum casum interdum absolute poni, quo iure nescio, contendit, sum-

Si hoc ſpatium *) eſt tale, quale **) ſi quis ad datam eius lineam ***) applicauerit, deficiat ſpatio †) tali, quale eſt illud ipſum applicatum, aliud mihi accidere videtur, etc....

vel paullo liberius et explicatius:

Si hoc triangulum eſt eiusmodi, vt, quod ad datam eius baſin applicaueris triangulum ſimile, deficiat triangulo ſimili ei ipſi, quod applicatum eſt, aliud quid mihi euenturum videtur, aliud vero etc.....

Quae verba vt recte exponantur, meminiſſe oportet, parallelogrammorum, quorum alterum ad datam rectam applicatum deficere dicitur, alterum ipſius defectus ſeu complementum audit, latus unum eſſe commune, baſes vero ſibi inuicem in directum adiacentes, unde fit, ut ex ambobus tertium confletur parallelogrammum ſuper recta ab initio data, tamquam baſi, conſtitutum. Eadem enim in triangulis, quorum unum ad datam rectam applicatum deficere altero dici debebit, locum habere neceſſe eſt.

---

que παρατέμνοντα, quod ſenſu nequaquam uſitato, ſed ficto, in locum ipſius παρατείναντα ſubdidit, ſic interpretatur, tamquam ſi caſus abſolutus ſit. Serranus videtur legiſſe παρατείναντι, quod eodem modo ac παρατείναντα, i. e. abſolute, verum meliori forſan iure, accipiendum. Exempla datiui ſic vſurpati habentur in Matthiae Gramm. §. 390., inter quae illud ex Thuc. II. 49. inprimis attendendum.

*) τοῦτο τὸ χωρίον ſcil. τρίγωνον.

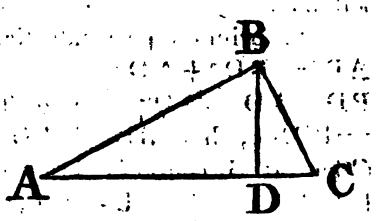
**) οἷον pro ὥστε τοιοῦτον, ſic vt Latinorum. *qualis* pro *vt talis*. Cf. Broederi Gramm. §. 512. τοιοῦτον autem Plato iam ſupra p. 82. d dixit, quod apud Euclidem ὅμοιον audit.

***) γραμμὴ poteſt eſſe baſis vel latus. In colloquio Socratis cum puero Menonis ſimpliciter de latere quadrati vſurpatur.

† χωρίον hic vtique triangulum ſignificat, ſicut in illis, quae antecedunt, εἰ μὲν δὴ τοῦτο τὸ χωρίον... reliq.

Iam verborum istorum hancce dare licet expositionem:

Si datum triangulum ABC est eiusmodi, vt, quod ad datam eius basin AC applicueris triangulum simile *) ABD, deficiat triangulo BDC simili ei ipsi, quod applicatum est, ABD, aliud quid mihi euenturum videtur, aliud vero... reliq.

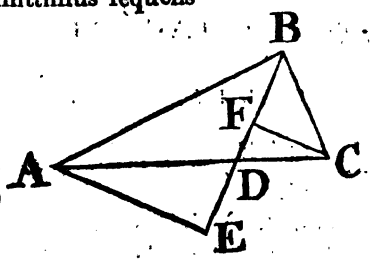


Nunc vero exiſtit quaeſtio de genere trianguli, cui proprietas verbis modo prolatis indicata competat. Reſponſum ad eam dabimus expreſſum theoremate, cui demonſtrando praemittimus ſequens

LEMMA

Si e vertice trianguli ABC ad baſin AC ducta fuerit recta BD quomodocumque, erit

$$\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD^q + AD \times DC.$$



*) Triangulum applicandum primo quidem adſpectu non niſi ſpecie (Dat. 40.) dari videtur, ſed reuera et magnitudine datur. Quoniam enim conſtructo illo e triangulo ABC relinqui oportet aliud triangulum, quod cum illo latus commune habeat, et baſin ſuam baſi illius in directum adiectam, nihil reſtat, niſi vt recta e vertice trianguli ABC, ad baſin AC protenſa fiat latus commune. Quo conſtituto cogitur, vt recta AB ſit alterum latus trianguli applicandi. Quare, quum triangulum ABD ſpecie datum ſit, datur etiam (Dat. 52.) magnitudine.

Ducta BD aut perpendicularis eſt ad baſin AC aut non.

Sit primum perpendicularis, erit (Elem. I. 47) $AB^q = BD^q + AD^q$; $BC^q = BD^q + DC^q$. Fiat $BD : AD = AD : e$; ergo eſt (Elem. VI. 17) $AD^q = BD \times e$, hinc $BD^q + AD^q = BD^q + BD \times e$ = (Elem. II. 3. coroll.) $BD \times \overline{BD + e}$. Similiter, ſi fiat $BD : DC = DC : f$, eſt $BD^q + BC^q = BD \times \overline{BD + f}$. Fiat denuo $AC : DC = BD : g$, quia $AB^q : \frac{AB^q \times DC}{AC} = AC : DC$, erit $BD : g = BD \times \overline{BD + e} : \frac{AB^q \times DC}{AC}$, proinde $\frac{AB^q \times DC}{AC} = g \times \overline{BD + e}$ = (Elem. II. 1.) $BD \times g + e \times g$. Eadem ratione, ſi fiat $AC : AD = BD : h$, eſt $\frac{BC^q \times AD}{AC} = BD \times h + f \times h$. Quocirca habetur $\frac{AB^q \times AD}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD \times g + BD \times h + e \times g + f \times h =$ (Elem. II. 1) $BD \times \overline{g + h} + e \times g + f \times h$. Sed erat $AC : DC = BD : g$, et $AC : AD = BD : h$, hinc *inuertendo* (Elem. V. 4. cor.) $AD : AC = h : BD$, et *ex aequo* $AD : DC = h : g$, proinde *componendo* (Elem. V. 18) $AC : DC = g + h : g$ = (Elem. V. 11) $BD : g$; ergo eſt $g + h = BD$, et $BD \times \overline{g + h} = BD^q$. Rurſus, quia $AD^q = BD \times e$ et $DC^q = BD \times f$, eſt $e : f =$ (Elem. VI, 1) $BD \times e : BD \times f = AD^q : DC^q =$ (AD : DC) + (AD : DC). Sed erat $g : h = DC : AD$ eſt igitur $e \times g : f \times h =$ (Elem. VI. 23) (e : f) + (g : h) = (AD : DC) + (AD : DC) + (DC : AD) = AD : DC, proinde *componendo* (Elem. V. 18) $e \times g + f \times h : f \times h = AC : DC =$ (AC : BD) + (BD : DC) = (AD : h) + (DC : f) = (Elem. VI.

23) $AD \times DC : f \times h$. Quocirca eſt $e \times g + f \times h = AD \times DC$. Atqui demonſtratum eſt, eſſe $BD \times \overline{g+h} = BD^q$. Ergo eſt $BD \times \overline{g+h} + e \times g + f \times h = BD^q + AD \times DC$: quocirca et $\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{DC} = BD^q + AD \times DC$.

Sit nunc BD non ad perpendiculum baſi AC. Demiſſis iam ex A et C perpendiculis in rectam BD productam, erit (Elem. II. 12. 13) $AB^q - AD^q - BD^q = 2\,BD \times DE$; $DC^q + BD^q - BC^q = 2\,BD \times DF$, hinc $AB^q - AD^q - BD^q : DC^q + BD^q - BC^q = 2\,BD \times DE : 2\,BD \times DF =$ (Elem. V. 15) $BD \times DE : BD \times DF =$ (Elem. VI. 1) $DE : DF$. Verum propter angulos AED, DFC rectos et angulum ADE (Elem. I. 15) aequalem angulo CDF triangula ADE, CDF ſunt aequiangula, proinde (Elem. VI. 4. V. 16) $DE : DF = AD : DC$. Ergo (Elem. V. 11) $AB^q - AD^q - BD^q : DC^q + BD^q - BC^q = AD : CD =$ (Elem. VI. 1) $AD^q : AD \times DC$, hinc (Elem. V. 12) $AB^q - BD^q : BD^q + CD^q - BC^q + AD \times DC = AD^q : AD \times DC =$ (Elem. VI. 1. V. 11) $AD \times DC : DC^q$, proinde (Elem. V. 19. 11) $AB^q - BC^q - AD \times DC : BD^q - BC^q + AD \times DC = AD \times DC : DC^q =$ (Elem. VI. 1) $AD : DC$, *componendo* igitur (Elem. V. 18) $AB^q - BC^q : BD^q - BC^q + AD \times DC = AC : DC$. Fiat $AC : DC = AB : k =$ (Elem. VI. 1) $AB^q : AB \times k$, et $AC : DC = BC : l =$ (ibid.) $BC^q : BC \times l$, erit (Elem. V. 11) $AB^q : AB \times k = BC^q : BC \times l$, hinc (Elem. V. 19) $AB^q - BC^q : AB \times k - BC \times l = AB^q : AB \times k = AC : DC = AB^q - BC^q : BD^q - BC^q + AD \times DC$. Quare $BD^q - BC^q + AD \times DC = AB \times k - BC \times l$. Sed $BC^q =$ (Elem. II. 2) $BC \times l + BC \times \overline{BC - l}$. Ergo (Elem. I. ax. 2) $BD^q + AD \times DC = AB \times k +$

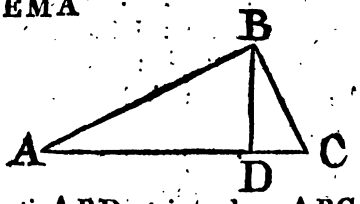
$BC \times \overline{BC-l}$. Erat autem $AC :: DC = BC : l$, proinde *conuertendo* (Elem. V. 19. cor.) $AC : AD = BC : \overline{BC-l} =$ (Elem. VI. 1) $BC^q : BC \times \overline{BC-l}$. Quare est $BC \times \overline{BC-l} = \frac{BC^q \times AD}{AC}$. Est quoque $AB \times k = \frac{AB^q \times DC}{AC}$, ergo $AB \times k + BC \times \overline{BC-l} = \frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD^q + AD \times DC$. Q. E. D.

Lemma hoc est Roberti Simsoni, qui id in *Apollonii locis planis* a se *restitutis* Lib. II. Lemm. 10. cas. 2 et Append. Lemm. 3 (p. 261 et 353 versionis Germanicae) proposuit atque demonstrauit. Demonstratio aliter quoque adornari potest et quidem paullo simplicius, quam hic factum est; adhibito scilicet perpendiculo, quod e vertice trianguli in basin demittitur. Verum enim vero quia sic tres casus, perpendiculo isto vel intra vel extra triangulum vel etiam in latus alterutrum cadente, distinguendi forent, demonstrationem breuiorem et istas ambages euitantem praetuli. Cf. quoque *Geometrie de Position par* Carnot art. 196 et Collectio geometrica, quae insigmita titulo paullo speciosiori: *Ausführliches Lehrgebäude der elementaren und der höhern Geometrie* Th. 1. Halis 1798 prodiit, p. 316 et seqq.

Sequitur iam, quod supra promisimus,

THEOREMA

Si applicato ad datam basin AC trianguli ABC triangulo deficiente ABD, quod simile sit toti ABC, defectus BDC



similis existit ipsi deficienti ABD, triangulum ABC, cui simile deficiens applicatum est, erit rectangulum.

Etenim quia triangulum ABD simile est triangulo ABC, erit (Elem. VI. 19) $\Delta ABC : \Delta ABD = BC^q : BD^q$. Sed est quoque (Elem. VI. 1) $\Delta ABC : \Delta ABD = AC : AD$, quare (Elem. V. 11) $AC : AD = BC^q : BD^q$ hinc $BD^q = \frac{BC^q \times AD}{AC}$.

Eodem concludendi modo ex eo, quod triangulum BDC (Elem. VI. 21) simile est triangulo ABC, efficitur, vt sit $BD^q = \frac{AB^q \times DC}{AC}$. Proinde est $\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = 2BD^q =$ (vi Lemmat. praec.) $BD^q + AD \times DC$, ergo $BD^q = AD \times DC$. Sed erat $BC^q : BD^q = AC : AD$, est igitur $BC^q : AD \times DC = AC : AD =$ (Elem. VI. 1) $AC \times DC : AD \times DC$, quare $BC^q = AC \times DC$. Eadem ratione est $AB^q = AC \times AD$. Quocirca erit $AB^q + BC^q = AC \times AD + AC \times DC =$ (Elem. II. 2) AC^q, angulus ABC igitur (Elem. I. 48) rectus. Q. E. D.

Ex iis, quae modo tradita sunt, facile hoc quoque colligitur, angulorum ADB, BDC vtrumuis esse rectum, et rectam BD perpendicularem basi AC. Quoniam enim $BD^q = AD \times DC$, hinc (Elem. VI. 17) $AD : BD = BD : DC$, ergo latera AD, BD trianguli ABD lateribus BD, DC trianguli BDC, similis priori ABD, proportionalia, anguli ADB, BDC, circa quos sunt latera proportionalia, inter se aequales erunt, hinc (Elem. I. def. 10) vterque eorum rectus, et BD perpendicularis basi AC.

Theorema praecedens ita quoque licet enunciare. Si triangulum ABC ducta e vertice ad basin recta BD diuidatur in partes ABD, BDC et toti ABC et sibi inuicem similes, triangulum istud ABC rectangulum erit, et ducta recta hypotenusae perpendicularis.

Hoc pacto ſtatim patet, theorema noſtrum eſſe propoſitionem 8 lib. VI. Elem. conuerſam, vnde ſequitur, vt, quae ibi de triangulo rectangulo enunciata ſunt, huic ſoli competant.

Geometres igitur a Platone inductus tantum ſub hypotheſi trianguli rectanguli determinare poteſt, datumne triangulum in dato circulo aptari queat, nec ne. Praetermiſſa quidem eſt haec determinatio noſtro loco, at non ſine cauſa ac ratione. Quum enim exemplum geometricum eo ſolum adiunctum ſit conſilio, vt, quid ſit ἐξ ὑποθέσεως σκοπεῖσθαι, declararetur, illa determinatio utique locum non habebat, ſed ſupervacanea fuiſſet, ſi adiecta eſſet.

Ad confirmandam, quae modo tradita eſt, explicationem facit id, quod determinatio deſcriptionis vel incluſionis trianguli rectanguli in circulo, quae, vt ex ſuperioribus intelligitur, ſimpliciſſima omnium eſt, Platonem haud facile fugere potuit, licet eas, quae aequilatero aut iſoſceli triangulo conueniunt, vtpote complicatiores eoque reconditiores, cognitas non habuerit. Nam, referente Diogene Laertio *) Thales Mileſius iam circuli triangulum rectangulum deſcripſerat, h. e. repererat, norma circulo ſic applicata, vt acumen circumductam tangat, ancones diametri extremitates pertranſire, ſeu angulum in ſemicirculo rectum eſſe. Meminit quoque Ariſtotelis **) huius ſimilis proprietatis tanquam notiſſimae.

Sed vt explicatio, a me hic propoſita, quantum in me ſitum eſt, omnibus numeris abſoluatur, duabus, quae moueri poſſunt, quaeſtionibus adhuc reſpondendum eſſe video. Quaerere nimirum licet,

*) In vita Thaletis.

**) Vid. loca mathem. Ariſtotelis apud Heilbronnerum in *Hiſtor. matheſ. vniuerſ.* §. 57 et 143.

primum quaenam verisimiliter sit causa, quamobrem Plato exemplum illustrandi gratia appositum potius de includendo dato triangulo in datum circulum, quam de quapiam alia effectione, v. c., de constructione trianguli dato triangulo simili ex tribus rectis datis, vbi etiam hypothesi *) locus est, desumere maluerit? deinde vero, cur idem in exprimenda hypothesi circa genus trianguli dato circulo includendi indirectum et per ambages ducentem modum directo ac simplici praetulerit?

Ad prius quod attinet, causa in ipso Platone sita est. Neminem enim fugere potest, quantopere ille figurarum geometricarum insignibus ac mirificis proprietatibus captus fuerit atque delectatus, vt qui earum contemplationi, quasi negotio animae proprio et germano, lubentissime se dederet, illasque ad rerum in natura maxime abstrusarum explicationem adhiberet. Est autem theorema istud, quod angulum in semicirculo rectum esse arguit, sane elegans, vtpote quo omnium omnino triangulorum rectangulorum, quae super eadem basi seu hypotenusa constitui possunt, quorum est infinita multitudo, constructio continetur. Ac declarata quoque est satis illius praestantia ab antiquitate eo, quod inuentorem eius bouem immolasse tradidit. Quare minime mirum videri debet, quod idem illud Platoni adeo placuerit, vt ex eo pendens problema omnibus aliis in exemplum vertendis anteferret.

Ad alterum nunc venio, ac rationem, quare Plato triangulum rectangulum potius proprietate eius

*) Hypothesis in hoc casu esset: Si duae harum rectarum vtcunque sumtae reliqua sunt maiores, tunc quidem aliud quid casurum est, etc. . .

ſupra allata, ex qua illud haud ſine negotio aliquo agnoſcitur, quam ſimplici nota anguli recti deſcripſerit, exponere aggredior. Inuenio autem eam in ſtudiis, quae Platonis tempore atque ipſius impulſu geometras occupatos tenebant. Quorum quidem ratio vt clarius liqueat, eam paullo altius repetamus, neceſſe eſt.

Pythagoras igitur inuento, quod ipſius nomen gerit, theoremate geometris viam duplicandi quadrati *) vel generatim inueniendi quadratum, quod ſit ad aliquod datum, vt unitas ad numerum, oſtenderat, eoque ſimul theoriam magnitudinum incommenſurabilium **) aperuerat. Inde transitione

*) Methodus, quam Plato in dialogo noſtro, p. 84. e — 85. a, huic problemati ſoluendo adhibuit, admodum ſimplex eſt. Conſtruitur quadratum, cuius latus duplum eſt lateris quadrati propoſiti, quodque adeo quadruplum eſt quadrati propoſiti. Hoc dein ductis diagonalibus quatuor quadratorum, ex quibus componitur, bifariam diuiditur. Opus autem eſt diagonales ſic duci, vt eae, quae ſunt in quadratis conterminis, non fiant parallelae, neque omnes in eodem puncto medio concurrant. Eadem methodo quadrilaterum quodcumque bifariam diuidi poteſt, biſſecando nimirum latera et iungendo biſſectionum puncta ſibi inuicem proxima rectis, quae parallelogrammum conſtituent, quod dimidium eſt quadrilateri propoſiti. — Platonis rationem duplicandi quadratum laudat Vitruuius lib. IX. praef. Ceterum hoc quoque exemplum monſtrat Platonis ſtudium circa ea, quae mirabile et ſingulare aliquid habent, cuiusmodi eſt quadrati duplicatio, quippe quae lineis quidem confici et expediri poſſit, numeris autem inueniri et explicari nequeat, id quod et Socrates cum Menonis puero colloquens haud obſcure ſignificauit.

**) Simpliciſſimum et notiſſimum huiuscemodi linearum exemplum praebent diagonalis (diameter) et

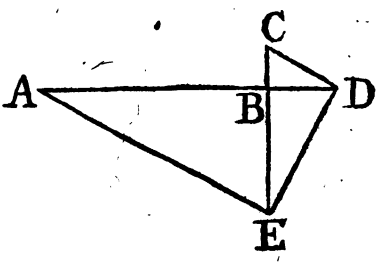
ad ſolidas figuras facta geometrae methodum quaeſiuerunt duplicandi cubum, qui inter ſolidas figuras eumdem, quem quadratum inter planas, tenet locum. Multis, vt facile eſt coniectura adſequi, fruſtra tentatis, Hippocrates Chius tandem hoc problema ad illud, quo inter duas rectas datas duae quaeruntur mediae proportionales deduxit, h. e. inuenit, ſolutionem eius haberi, ſi in poteſtate ſit, duas medias proportionales inter duas rectas, quarum una latus ipſum cubi, altera duplum huius lateris ſit, inuenire. Problemati eum in modum, quo ab initio propoſitum erat, expreſſo, quum aliquantiſper neglectum eſſet, nouum dein ac magnum momentum additum oraculo Apollinis Delii, qui, quanam ratione peſtis diu atque acriter Delios ceterosque Graecos vrgens auerti poſſet, conſultus ea fini duplicationem aras ſuae, cui forma erat cubica, praeceperat *). Hinc Plato, ad quem res delata eſt, occaſionem reperit, Graecos neglectus geometriae infimulandi, cui tollendo non modo omnes ſui aeui geometras ad ſoluendum problema, cuius ex tracta-

---

latus quadrati, quarum ratio in numeris ea eſt, quam $\sqrt{2}$ ad 1 habet. Haec earum incommenſurabilitas argumento eſt, lineas non componi ex indiuiſibilibus, ſicut olim quidam opinabantur, et hodie etiam nonnulli autumant, quorum ſententiam iam Ariſtoteles illo argumento redarguit. — Cf. etiam dicta in annotatt. praeced.

*) Inde problema de duplicatione cubi ſiue de inueniendis duabus mediis proportionalibus inter duas rectas datas *Deliacum* audit. Hiſtoriam eius variasque ſolutiones quum veterum, tum recentiorum geometrarum, copioſe ac pererudite perſecutus eſt Celeb. Reimer in libro ſingulari, Göttingae 1798. euulgato.

tione maxima incrementa geometriae acceſſura ſperabat, inſtigauit, verum, quo plus adhortatione ſua proficeret, et ipſe ſolutionem tentauit. Haec quidem ſolutio, quam Eutocius *) ſeruatam nobis tradidit, tota pendet ex ea trianguli rectanguli proprietate, quam noſtro loco geometres Platonicus hypotheſin ſuam fecit. Ex illa enim ſequitur, perpendicularem BD (vid. fig. antea pag. 46. poſita) ab angulo recto in baſin AC demiſſam eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta baſis AD, DC ſeu AD : BD = BD : DC.



Quodſi iam duo triangula rectangula AED, EDC ſuper eodem latere ED et ad easdem partes intelligantur ſic conſtructa, vt hypotenuſae ſeu baſes AD, CE ſint ad angulos rectos ſibi inuicem, baſium ſegmenta AB, BE, BD, BC quatuor continue proportionales exhibebunt, et quidem externa ſegmenta AB, BC binas extremas, interna vero BE, BD binas medias, vtroque ſegmento interno exiſtente media proportionali inter alterum internum atque externum huic in directum et ex aduerſo poſitum, vt ſit AB : BE = BE : BD = BD : BC. Tali autem iunctura et copulatione duorum triangulorum rectangulorum Platonis modus duas medias proportionales duabus datis rectis inueniendi innititur.

*) In commentario ad Archimedis libr. II. de ſphaera et cylindro.

Insignis ergo vsus, quem proportio ex triangulo rectangulo, quod perpendiculo ab angulo recto in basin demisso in duo triangula sibi invicem et toti similia diuisum est, deducta Platoni in soluendo maximi momenti problemate adtulit, pro causa haberi debet, cur trianguli rectanguli proprietatem, ex qua illa proportio pendet, ad hoc designandum elegerit. Quod autem istam proprietatem aenigmatico modo expressserit, forte ea causa factum est, vt geometris opulentiam disciplinae, quam profiterentur, monstraret, theorematis eximii foecunditate vsus ad inuestigandum problema, in quo ex data rei proprietate genus ipsum rei quaeritur.

Quod vero ad scrupulum attinet, quem quis forte in eo offenderit, quod Socrates nostro loco thesin intellectu difficiliorem ea, quam cum Menonis puero tractat, eamdemque circuitione adhibita in medium protulerit, is plane nullus est, facileque tollendus. Primum enim responsum, ad interrogationem, quot pedes in latere quadrati duplicati contineantur, quod Socrates primo a puero desiderat, postea autem ipsi condonat ac remittit, pariter arduum est. Deinde vero cogitemus oportet, Socratis cum Menone colloquentis rationem esse aliam, aliam ad puerum Menonis verba facientis, verbaque difficilia non Socratis sed geometrae esse, quorum sensus siue obscurior siue clarior ad rem, cuius causa prolata sunt, perinde se habet.

Restat, vt adhuc de eruditorum, qui nostrum locum explicandum sibi sumserunt, conaminibus circa eum breuiter exponam. Errarunt autem plerique horum virorum in eo, quod verbis, in quibus omnis resident difficultas, εἰ μὲν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον . . . . ., conditionem, sub qua datum trian-

gulum dato circulo includere liceat, exprimi putarunt, id quod tantundem a vero, quantum a Platonis instituto abest. Hoc in vniuersum praemonito de singulis iam videamus.

Gedikius quidem plane ἀγεωμέτρητος ad nostrum locum accessit. Mutatis χωρίον τρίγωνον in χωρίον τετράγωνον et παρατείναντα in παρατέμνοντα verborum εἰ μέν ἐστι .... sensum effingit hunc: *Si ista figura quadrilatera ita comparata fuerit, vt linea diagonali ducta in duas aequas portiones diuidatur*, reliq.... Vt de vi, a qua interpretationis negotium auspicatus est, nihil dicam, illud tamen minime praeteriri debet, quod verba, quae Gedikius expunctis a se substituit, ea, qua vult, significatione apud geometras haudquaquam occurrunt. τετράγωνον enim de solo quadrato *), non de quavis figura quadrilatera, quae τετράπλευρον audit, vsurpatur, et παρατέμνειν pro δίχα τέμνειν neque ab Euclide, neque Proclo, nec quoquam alio adhibitum reperieris. Hoc unum sufficit ad Gedikii, qui in ceteris aeque minus feliciter egit, rationem penitus destruendam.

Eadem facilitate ac breuitate explicationem viri docti, qui primam editionem Berolinensem in Biblioth. Germ. Tom. L. p. 278. recensuit, et Kluegelium **) de nostro loco consuluisse videtur, refel-

---

*) Manifeste deprehenditur hic significatus in deriuatis τετραγωνίζειν et τετραγωνισμός, quorum vtrumuis de quadrando circulo sexcenties legitur.

**) Cuius sententia de loco, hic tractato, extat in ipsius Lexico mathem. art. *Gröfstes und Kleinstes* Nr. 12. Tom. II. p. 657.

lere datur. Quamuis enim negari nequeat, παρατείνειν de linea in circulo aptanda dici posse, quod ille vir in sua interpretatione sumit, attamen loco nostro non γραμμήν, sed χωρίον παρατείνειν iubemur.

Michelsenus, verba negotium interpretibus facessentia ad solum triangulum datum pertinere recte vidit, istisque angulum rectum indicari *) coniecit, qua quidem coniectura non omnino falsus fuit, sed modus, quo angulum rectum e verbis istis elicit, erroris plenus est, minimeque probandus. Primo enim παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν interpretatur ita, vt sit *extendere spatium* h. e. triangulum expositum ABC (vid. fig. dialogo Menonis nomen ferenti in secunda ac tertia edit. Berolinensi subiuncta) *producendo lineam seu basin eius* AC, deinde vero χωρίον παρατεταμένον vult esse *spatium angulare* BCD extra figuram, inque hoc aperte filii contradicit, quum ex eo, quod initio assumtum erat, extensum triangulum h. e. spatium angulare BAD esse debeat. Praeterea angulus c in triangulo ABC linea AC producta non *relinquitur*, sed ante productionem illam *iam extat*, et cum triangulo ABC a principio datus est. Haec argumenta contra Michelseni explicationem sunt e rebus ducta, omissis iis, quae e verbis petere licet, in quibus illud grauissimam est, quod χωρίον contra vsum loquendi, familiarem geometris, angulum seu spatium angulare infinitum significare sumitur.

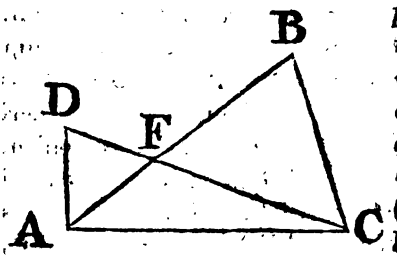
*) Est ista coniectura aliquid, nec tamen rem absoluit, quoniam angulus rectus sine potius triangulum rectangulum non per essentialia, sicut Michelsenus putauit, sed per attributa denotatum est.

Muellerus, qui libello singulari *) locum noſtrum emodandum ſuſcepit, multum quidem eruditionis atque acuminis oſtendit, attamen nec ipſe rem confecit. Quaerit enim in verbis intricatis determinationem inſcriptionis trianguli in circulo, quam iis minime ineſſe ſupra demonſtrauimus. Porro ſine codicum auctoritate verbis παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν inſerit articulum τὴν, poſt δοθεῖσαν ponendum, mutatque παρατείναντα in ὑποτείναντα et παρατεταμένον in παρατετμημένον. In interpretatione textus hoc modo a ſe reficti verſatur deinde ſic. Verbo ὑποτείνειν actiuam poteſtatem tribuit, iungitque ὑποτείνειν τὴν γραμμὴν αὐτοῦ, quod *ducere hypotenuſam ad latus eius* (ſcilicet trianguli propoſiti) transfert; ἡ δοθεῖσα autem ſubaudito διάμετρος ipſi eſt data circuli diameter: totam denique formulam ὑποτείνειν παρὰ τὴν δοθεῖσαν τὴν γραμμὴν αὐτοῦ de hypotenuſa, quae datae circuli diametro aequalis ſit, ad latus trianguli ducenda exponit. Verum his plurimum correctionis opus eſt. Primum enim vox ὑποτείνειν apud geometras, vti ex Elem. I. 4. 6. 18. 19. 26. 47. videre licet, nunquam non paſſiuae ſignificationis eſt, et valet *ſubtenſum eſſe*, eademque nonniſi de linea recta, quae intra crura anguli ſic ducta eſt, ut extremitatibus ſuis vtrumque crus anguli tangat, minime autem de ea, quae ab extremitate alterius ſub angulo quodam deducitur, occurrit. Tum nullo modo concedendum eſt, per τὴν δοθεῖσαν circuli diametrum innui. Supprimunt quidem, ubi facile ſuppletur geometrae admodum frequenter voca-

*) *Commentar über zwey dunkle mathematiſche Stellen in Plato's Schriften, die eine im Theätet, die andere im Meno.* Nürnberg 1797.

lalum γραμμῆς, at vocabuli διαμέτρου ellipſis exemplo deſtituitur. Praeterea τὸ δοθὲν ſemper ad circulum, nunquam ad diametrum refertur, vt dicatur ἡ διάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου, nequaquam vero ἡ τοῦ κύκλου δοθεῖσα διάμετρος. Tandem vis praepoſitioni παρά in interpretatione formulae ante allatae adſignata, vt παρὰ τὴν δοθεῖσαν ſit: *ad magnitudinem datae* (diametri) an exemplis ſatis claris adferi poſſit, dubitandum videtur.

Sed demus Muellero, textum ab ipſo bene conſtitutum recteque interpretatum eſſe, attamen hypotheſis quam elicit, ob mancam ſuam atque imperfectam formam reiici debet. Eſt autem illa: *Si triangulum propoſitum ABC fuerit ita comparatum, vt ducta ad magnitudinem datae circuli diametri hypotenuſa CD ad latus eius AC* (i. e. ſecundum Muelleri explicationem, conſtructo triangulo rectangulo ADC, cuius unum latus circa angulum rectum ſit AC, quod autem angulo recto ſubtenditur latus DC, aequale diametro circuli dati) *deficiat tali triangulo FBC, quale eſt illud ipſum, quod abſciſſum eſt, ADF* .... reliq. Enimvero nemo geometria leuiter tantum imbutus problema: *Ad datam rectam conſtituere triangulum rectangulum, quod datam habeat hypotenuſam*, eo, quo hic factum eſt, modo extulerit, nec triangulum propoſitum ABC deficit triangulo FBC, ſed quod trianguli rectanguli ADC conſtructione formatur, AFC, defectu quippe exiſtente FBC. Adhaec triangulum ADF nequit dici abſciſſum, quum nullam partem trianguli ABC, de quo ſermo eſt, conſtituat,



trianguli ADC autem, cuius minorum pars eſt ADF, in antecedentibus nulla omnino fiat mentio. Atque etiamſi oratio hiare, et vitioſe a triangulo ABC ad triangulum ADC tranſilire ſtatuatur, ne ſic quidem triangulum ADF poterit audire abſciſſum, ſed relictum ſ. reliquum debebit praedicari, quoniam abſciſſum eſt AFC. Verum haec ſunt minoris momenti; grauiſſimum illud eſt, quod ipſa hypotheſis, quam Muellerus Platoni ſubiicit, ne in vniuerſum quidem valet, id quod facile ſequenti modo oſtenditur. Sit angulus ACB rectus, ergo aequalis ipſi DAC, erit ADC = DCB et quia inſuper DFA = BFC, triangula BFC et ADF ſunt aequiangula, ideoque ſimilia. Dico iam, circulum circa DC diametrum deſcriptum, qui quidem ob angulum DAC rectum transibit per A, non tranſire per B, niſi ſit AB = DC, proinde et BC = AD. Transeat enim, ſi fieri poteſt, et ponatur AB maior ipſa DC. Quoniam itaque ADC, ABC anguli ſunt in eodem circuli ſegmento, erit ADC = ABC. Sed in triangulis ADF, FBC ſimilibus eſt AF : FD = FB : FC, ergo AB : DC = FB : FC, hinc, quia AB > DC, FB > FC, quamobrem angulus DCB i. e. ADC > ABC, quum tamen ipſi aequalis oſtenſus ſit. Non transibit igitur circulus circa DC deſcriptus per B, ſi AB ſit > ipſa DC, nec itidem, ſi eadem ſit minor ipſa DC. Tranſit ergo per B eo ſolum caſu, quo habetur AB = DC. Ex quo perſpicuum ſit, innumeros dari caſus, vbi quidem triangulum ADF ſimile ſit triangulo FBC, neque tamen triangulum ABC includi poſſit circulo, cuius diameter aequalis eſt DC hypotenuſae trianguli rectanguli ADC ad latus AC conſtructi.

Trembleii extat commentatio ſuper noſtro loco, commentariis Academiae Berolinenſibus ad an-

num 1800 inſerta *), quae propter ſubtilitatem ſuam et doctrinae copiam omnino legi meretur. Ingenioſiſſimus auctor videtur tamen opinione iuſto maiori, quam de Platonis eruditione mathematica concepit, abripi ſe paſſus eſſe. Dum enim in exemplo geometrico a Socrate prolato Platonem ſpecimen analyſeos, cuius inuentionem Proclus et Diogenes Laertius ad illum referunt, exhibere voluiſſe autumat, quaeſtionem de inſcribendo triangulo in circulo nimis lenem, et agrimenſore potius quam Platone dignam, iudicat, quin contra de extendendo (i. e. transmutando) ſpatio triangulari in ſpatium circulare agi putat, hancque ſuam ſententiam, inprimis eo confirmare ſtudet, quod vocabulum χωρίον ab Euclide et Archimede non aliter, quam vbi areae ſ. embadi figurae cuiusdam habeatur ratio, vſurpatum ſit, et quod ἐντείνειν ab iisdem auctoribus numquam de inſcribenda figura aliqua in alteram adhibitum inueniatur. Quaeſtioni ad hanc ſententiam correcta interpretationem verborum: εἰ μὲν ἔστι τοῦτο τὸ χωρίον . . . . ., quam Gedikius in ſec. editione Berolinenſi dederat, ſtare poſſe conſtet, ſi quidem, quae in ea de quadrilatero enunciata ſunt, triangulo tribuantur. Recte enim vidit, τετράγωνον, quod τριγώνου loco Gedikius Platoni obtrudere haud veretur, idcirco non eſſe admittendum, quod inſcriptio quadrilateri in circulum non ſic ab eius per diagonalem biſſectione dependeat, vt illa ſemper procedat, etiamſi haec in poteſtate ſit. Ex Tremblaii igitur ſententia hypotheſin ad diiudicandum, num fieri poſſit, quod in quaeſtione faciendum proponitur, requiſitam ita effingere oportet: *Si triangulum eſt eiusmodi figura, qua*

*) p. 241 et ſeqq.

per datam rectam diſſecta relinquatur ad unum latus lineae ſecantis tantum ſpatii, quantum ad alterum extenſum habetur, tunc quidem . . . . . reliq., omnisque textui inferenda mutatio eo redit, vt pro παρατείναντα ſubſtituatur παρατέμνοντα, quamquam et illud ſaluo ſenſu conſeruari poſſe Trembleius putat, dummodo παρατείνειν χωρίον παρὰ γραμμὴν vertere liceat: *protendere ſpatium trans lineam.*

In hac expoſitione quo minus acquieſcamus, quae iam in medium prolaturi ſumus, impediunt. Primum ſi de transformatione trianguli in circulum quaereretur, Plato procul dubio pro verbo ἐντείνειν aliud poſuiſſet, quum illud ad ſignificandam figurae alicuius transmutationem in alteram haudquaquam aptum ſit, quippe quae appoſite magis verbo aliquo cum praepoſitione μετὰ compoſito, velut μεταβάλλειν, indicetur. Praeterea dubitatio, quam de vulgari interpretatione verbi ἐντείνειν Trembleius affert, penitus tollitur eo, quod apud Proclum *) non modo ἐντείνειν τρίγωνον εἰς κύκλον, verum etiam ἐντείνειν ὀρθὴν γωνίαν εἰς ἡμικύκλιον habetur, in quarum formularum poſteriori manifeſte nihil aliud, quam: *includere* vel *inſcribere*, ſignificat, proinde quoque in priori ita accipi poteſt. Tum vt quaeſtio vniuerſalis redderetur, qualem eam ſtatuit Trembleius, debuiſſent omitti pronomina demonſtratiua, ſaltem id, quod vocabulo κύκλου praemiſſum eſt, et quaeſtio hoc modo proponi: Εἰ οἷόντε ἐς κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον μεταβληθῆναι (ſiue μετασχηματισθῆναι): quamquam dubitauerim, Platonem ſic ſcripturum fuiſſe, quum aequalitas circuli et trianguli in hoc caſu plane

*) pag. 23. edit. Baſil.

in medio relinquatur, taciteque magis ſumatur, quam diſerte indicata ſit. Neque inuenimus, ullum veterum geometrarum de transformatione unius figurae in alteram locutum eſſe, ſed problemata ad illam pertinentia ſic fere: Τῷ δοθέντι χωρίῳ ἴσον χωρίον εὑρεῖν, vel ſimili modo, exprimere amant. Ad vocabuli χωρίου vſum deinde quod attinet, omnino negari debet, quod idem Trembleius euincere nititur, illud numquam, niſi areae, et eius quidém ſolius, ratione habita adhiberi, quum exempla contrarium adſtruentia non deſint. Quae inter referendum eſt illud ipſum, quod Trembleius ex Euclidis Elem. I. 34. adfert, et in rem ſuam trahere, licet fruſtra, conatur, quoniam ſola pars tertia enunciationis ad aream ſpectat. Cui exemplo iam a nobis clariora aliquot addantur. In Euclidis Dat. lib. Def. III. eſt: Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αὔτε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας δεδομένοι: Propoſ. LV. autem: Ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται, vbi χωρίον idem valere ac σχῆμα vel σχῆμα εὐθύγραμμον, quum ex collatione propoſitionis cum definitione facta, tum vero ſponte ex eo patet, quod figura reſpectu vnius areae ſpecie data dici nequit. Apud Heronem *) ſimilis earumdem vocum permutatio occurrit in definitione hic ſubiecta: Βάσις λέγεται ἐπιπέδου χωρίου γραμμὴ ἡ ὡσανεὶ κάτω νοουμένη, πλευραὶ δὲ μιαὶ τῶν τὸ σχῆμα περιπλειουσῶν. Platonis χωρίον τρίγωνον ergo iure optimo perinde ac

*) In libello περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων, vna cum Euclidis Elem. libro primo a Cunrado Daſypodio Argentorati 1570 edito, p. 40.

ſimplex τρίγωνον vel plenius σχῆμα τρίγωνον accipere licet. Poſtremo fingamus, verum eſſe, ab Euclide et Archimede, quos Trembleius inprimis citat auctores, figuram, in qua nihil praeter aream expenditur, ſemper nomine χωρίου inſigniri, attamen inde nihil ad interpretationem loci noſtri exſculpi poteſt, quum, vt ſupra oſtendimus, Platonis verba ad normam loquendi, ad quam illi geometrae vocabulorum vſum direxerunt, haud temere exigenda ſint, id quod et ab ipſo Trembleio animaduerſum quidem, ſed nihilominus neglectum eſt. Abunde fit haec contra Trembleii rationem diſputaſſe, quae non minoribus rerum quam verborum difficultatibus premitur.

Schleiermàcherus in ſua operum Platonicorum verſione *) non dubitat, quin circuli vel diametri eius mentio fuerit iniicienda, quoniam de coaptando triangulo in circulum agatur. Neque in eo falſus eſt vir eruditus, ſi quidem Platoni determinatio inſcriptionis in circulum, quae in vniuerſum triangulorum genus cadit, nota atque explorata fuiſſe pro certo ſtatuatur. Verum hoc tum per ſe minus probabile eſt, tum verbis ὑποθέμενος μὲν .... εἴτε μή, manifeſto contrarium. Quodſi enim geometra Platonicus determinationem iſtam habuiſſet promtam atque apertam, miſſa omni cunctatione et haeſitatione reſpondere debebat: Si rectangulum ſub duobus quibusvis huius trianguli lateribus comprehenſum aequale eſt rectangulo, quod continetur perpendiculo in reliquum trianguli latus ex vertice anguli, cui ſubtenſum eſt, demiſſo et circuli diametro, tum quidem triangulum illud dato circulo includi poteſt. Sin vero rectangulum prius poſteriore maius vel minus fuerit, inclusio

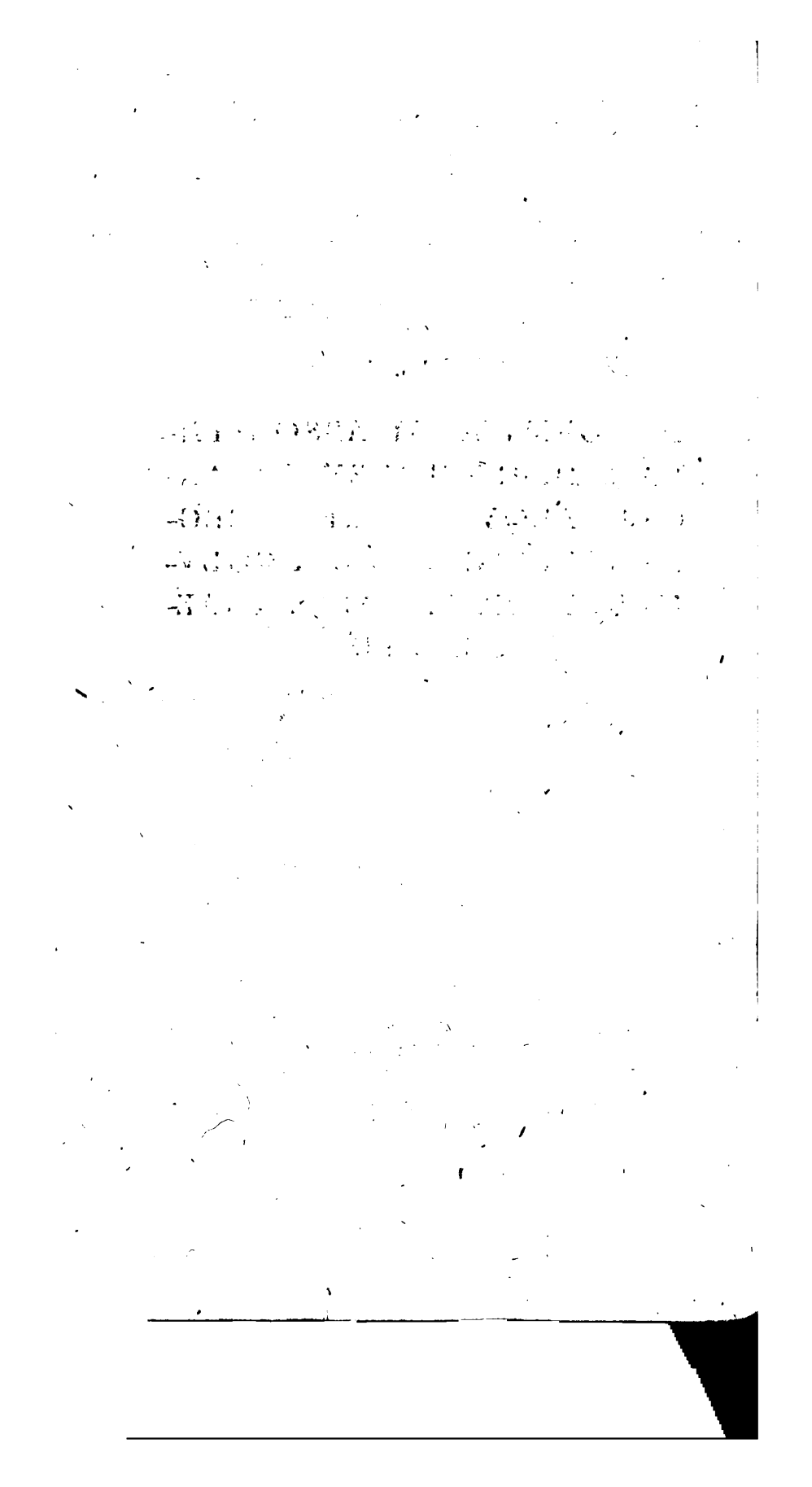
*) Tom. II. Vol. I. p. 370 et 517.

deſiderata fieri nequibit. Atque hac quidem ratione verbis iſtis ὑποϑεμένος μὲν οὖν ..... ſupersedere poterat, quae niſi pro inanibus habere velimus, ſatis aperte oſtendunt, geometram non aliter de incluſione trianguli, vtrum ſcilicet locum habeat nec ne, iudicium ferre poſſe, quam ſi proprietatem, quae verbis εἰ μὲν ἐϛὶ .... expreſſa eſt, dato triangulo conuenire ſumſerit. Accedit, quod admiſſa Schleiermacheri ſententia ſimilitudo, quae inter exemplum geometricum et rem, cuius illuſtrandae gratia prolatum eſt, intercedere debet, funditus perit, repudiata ea, optime conſeruatur. Vt enim ad decidendam quaeſtionem, num virtus doceri poſſit nec ne, Socrates hypotheſi quadam de vi genereque virtutis vtitur, ſic geometra reſponſurus quaeſtioni, datumne triangulum dato circulo includi queat nec ne, hypotheſin ſuper ipſo trianguli genere arceſſit, quam quidem nullo ad circulum reſpectu implicitam eſſe oportere, facile eſt intelligere. Venio nunc ad interpretationem Schleiermacheri, qui falſa opinione ductus non potuit non locum difficilem male vertere. Vertit autem ſic: *Wenn dieſes Dreyeck ein ſolches iſt, daſs wenn man um ſeine gegebene Grundlinie den Kreis herumzieht, noch ein eben ſolcher Kreis übrig bleibt als der unſpannte ſelbſt iſt, alsdann dünkt mich wird etwas anderes erfolgen, und wiederum etwas anderes, wenn dieſes unmöglich iſt.* Haec verba legenti vel audienti, neceſſe eſt, extemplo occurrat quaeſtio, qui fieri poſſit, vt deſcripto circa datum triangulum circulo alius relinquatur circulus aequalis ei ipſi, qui circumſcriptus eſt. Profecto opus fuit, vt vir doctiſſimus explicaret, quid verbis iſtis ſibi vellet. Exponit autem illa in adnotationibus ſuis ſic: *Wenn das gegebene Dreyeck ſo beſchaffen iſt, daſs, wenn man die gegebene Grundlinie oder die Hypotenuſe deſſelben* (de triangulo re-

etangulo enim agi coniectura male quidem fundata, vera tamen affecutus eſt) *in den Kreis einträgt, ſolche den Kreis in zwei gleiche Hälften theilt, d. h., ſich als Durchmeſſer zeigt, ſo ... u. ſ. w.* At ſi Platoni nihil praeter hoc ſignificare in animo fuiſſet, iure meritoque in reprehenſionem veniret, quod non ſimpliciter dixerit: Si baſis vel hypotenuſa trianguli expoſiti aequalis eſt diametro circuli dati, incluſio fieri poteſt; ſin minus, non efficietur. Ad hoc ex Schleiermacheri mente res aliquo modo tentando peragitur: quod a geometrica ratione maxime eſt abhorrens. Ceterum locus ſiniſtre interpretatus reddendus erat: *Wenn dieſes Dreyeck ein ſolches iſt, dergleichen an der gegebenen Grundlinie deſſelben entworfen, von eben einem ſolchen Dreyecke ergänzt wird, als das entworfene iſt, ſo .... u. ſ. w.* vel minus breuiter, at lucidius: *Wenn dieſes Dreyeck ſo beſchaffen iſt, daſs das ähnliche, welches man an der gegebenen Grundlinie deſſelben entwirft, ein Dreyeck von eben der Gattung zur Ergänzung hat, als das entworfene iſt, ſo .... u. ſ. w.*

III.

DE FORMVLIS AD ABSOLVENDAM DIMENSIONEM TRIANGVLI AEQVILATERI ET SEGMENTI CIRCVLARIS A COLVMELLA LIB. V. CAP. 2. PRAESCRIPTIS



1. Quamquam geometria a veteribus, e quibus ſoli Graeci hic cenſendi veniunt, inprimis ex quo Plato ad profundiorem eius tractationem homines aeui ſui exhortatus erat, maxime per ſe et propter ſe culta eſt *), nulla commodi, quod inde in vitam communem redundare poſſit, ratione habita; attamen facile eſt videre, neceſſitatem, vt ne omne omnino ſtudium illius ad vſum vitae traducendae omitteretur, fuiſſe effecturam. Quippe haec ipſa fuit cauſa, quare Romani, cum ſeuerioribus Muſis parum conuerſantes, geometriae in tantum, quantum ad menſuras agrorum agendas finesque regundos opus eſt, addiſcendae operam darent. Conſiſtit autem magna pars artis,

*) Inſigne prorſus atque admiratione ſumma dignum eius rei exemplum prodidit Archimedes. Hic enim incomparabilis vir, vt Plutarchus in Vita Marcelli refert, tam alto erat animo tantisque theorematum diuitiis praeditus, vt noluerit de his, quibus ſibi nomen et opinionem non humani, ſed diuini cuiusdam ingenii parauerat, quidquam ſcribere. Quippe machinarum effectionem omnemque artem, quae neceſſitati inſeruiret, illiberalem et ſordidam ratus, in his modo ſtudium ſuum ſerio poſuit, in quibus pulchritudo et ſubtilitas nulli commixta neceſſitati ineſt. — Quanto theoretices ſtudio duceretur Archimedes, ex hoc quoque perſpicitur, quod in memoriam inuenti a ſe theorematis, e quo cylindrus rectus ſphaerae, quam circumſcribit, vt ſoliditate, ſic integra ſuperficie, ſeſquialter eſt, tumulo ſuo cylindrum et ſphaeram ipſi inſcriptam apponi rationemque, in qua inter ſe ſunt illa ſolida eorumque ſuperficies, adſcribi voluerit.

quae in dimetiendis diuidendisque agris, atque vniuerſe in dimenſione rerum corporearum, quae ſub aliquam formarum geometricarum cadunt, verſatur, in arithmetices ad geometriam applicatione, quam etſi geometrae antiqui, vt geometriae natiuus ſuus color et pulchritudo conſtaret *) in tradenda ſua diſciplina ſedulo euitarent, tamen ſi quando peculiaris et quaſi propria magnitudo aliquius rei inueſtiganda incideret, huic fini adhibere non dubitarunt. Quo nomine Archimedes ipſe allegandus eſt, qui in libro de circuli dimenſione exemplum huius applicationis reliquit. Sed geometriae practicae, proprie ſic dictae, pauca tantum ex antiquitate ad nos transmiſſa ſunt monumenta, eo maioris facienda diligentiusque conquirenda, quo minus ſubſidiorum ad penitus cognoſcendum, quem ad finem in hoc campo ſcientia veterum excucurrerit, nobis ſuppetit. Poſſunt autem hae reliquiae perquam commode in duo genera diſtribui, quorum vnum ea menſurandi praecepta, quae auctores in tranſitu atque aliud agendo, illuſtrandi ſolum gratia, protulerunt, complectitur, alteri ſubiectae ſunt formulae dimetiendi a ſcriptoribus ex inſtituto et dedita opera traditae, totique adeo libri eiusmodi formulis referti. Ad prius genus referenda eſt quadrati, trianguli et rectanguli, et iſtius quidem a Platone **), horum a Proclo ***) tradita dimenſio, poſteriore continentur formulae a Columella ****) ad aream varia-

*) Cf. quae de exterminandis e geometria computationibus Hauſenius in praefatione elementorum matheſeos nec non in prooemio geometriae bene monuit.

**) In Menon. p. 82. d.

***) In Commentar. in primum Euclidis Elem. librum III. 8. IV. 11. et 18. p. 64. 105 et 109.

****) Libr. de Re Ruſtica V. 2.

rum figurarum inueniendam expoſitae, et magna ex parte ab incerto ſcriptore rei agrimenſoriae *), ſed negligenter admodum repetitae, nec non Heronis iunioris Geodaeſia **).

2. E formulis Columellae duae prae ceteris notari merentur, quarum altera trianguli aequilateri aream ex dato ipſius latere inueſtigare, altera vero portionis circuli (arcus nomine a Columella inſignitae) quae quidem ſemicirculo minor eſt, aream ex nota eius baſi et altitudine ***) colligere docet. Sunt autem formulae ipſae generaliter conceptae hae:

Vt dimenſio trianguli aequilateri fiat, ducatur latus in ſe ipſum, et producti ſumatur pars tertia, itemque decima. Hae in unam ſummam collectae aream quaeſitam exhibebunt ****).

Ad dimenſionem portionis circuli, ſemicirculo minoris, conficiendam adiiciatur baſi altitudo, et ſumma multiplicetur per altitudinem. Producti huius dimidio ſi addatur pars decima quarta quadrati a

---

*) In Rei Agrariae auctoribus a Goeſio edit. p. 311—315.

**) De hoc libro eiusque auctore omnino conſulenda eſt Pfleidereri Trigonometria plana (theodiſce conſcripta) §. 172—175.

***) *Baſin* ſegmenti circularis cum Hugenio, qui in hoc Archimedis exemplum ſecutus eſt (def. Prop. XVIIIae libri de quadratura Parabolae praemiſſ.) appellare licet rectam, qua una cum arcu ſegmentum comprehenditur, *altitudinem* vero maximum perpendiculum ab arcu in baſin demiſſum.

****) Goeſianus menſor p. 312. regulam ab hac diverſam, ſed plane falſam inueniendae trigoni iſopleuri areae praeſcribit. Iubet enim unum latus in dimidium alterius ducere. In dimenſione hexagoni aequilateri et aequianguli p. 315 tamen formam a Columella conſtitutam ſequitur.

dimidia basi facti, quae prodit summa aream desideratam manifestabit *).

Ex priore formula igitur area trianguli aequilateri dicto eius latere a, est $\frac{1}{3}aa + \frac{1}{10}aa = \frac{13}{30}aa$. Ex posteriore autem fit area segmenti circularis, semicirculo minoris, denotata basi eius per $2b$, altitudine vero per h, $= \frac{(2b+h)h}{2} + \frac{1}{14}bb = bh + \frac{1}{14}bb + \frac{1}{2}hh$.

Has expressiones veris tantum proximas esse, comparatione ipsarum ad veras leuiter modo facta, primo intuitu fit manifestum. Etenim seruatis, quae antea positae sunt, denominationibus area trianguli aequilateri est $= \frac{1}{4}aa\sqrt{3}$, portionis circuli autem

$$\left(\frac{bb+hh}{2}\right)^2 \text{Ang. tang} \frac{2bh}{bb-hh} - \frac{b(bb-hh)}{2h}.$$

3. Sed quoniam plenior intelligentia rationis et constitutionis formularum e Columella allatarum, et ab ipso fine dubio ex Graeco quodam auctore tractarum, ad meliorem rei arithmeticae et geometricae veterum, earumque consociationis, conducere videtur, formulis illis accuratius iam euoluendis atque amborum generum expressionibus, proxime videlicet et absolute veris, quibus vtriusque figurarum ante memo-

---

*) In hac formula reddenda geodaeta apud Goesium p. 315 mire lapsus est. Neque enim vidit, in exemplo numerico, quo Columella ad regulam suam commonstrandam vsus est, quaternarium, per quem summa baseos atque altitudinis collecta multiplicatur, altitudinem esse, sed pro numero nullius nominis et constante factore habuit. Hinc in exemplo, quod ipse adfert, eundem retinet, quamquam altitudinem quinque pedum ponit. Sed quodammodo excusandus videtur, propterea quod Columella rationem quaternarii istius haud dilucide expediuit, satis habens dixisse: *Hoc duco quater.*

ratarum area ob oculos ponitur, paullo diligentius inter se conferendis operae pretium me facere spero.

Aequatis igitur duabus formulis, aream trigoni isopleuri sistentibus, fit

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{153}{120}$$
$$\text{hinc } \sqrt{3} = \frac{265}{153}.$$

Omnino notatu dignum est, fracturam $\frac{265}{153}$ e numero earum esse, quae e fractione continua radicem quadratam ternarii exhibente deriuantur, et ad verum valorem ipsius $\sqrt{3}$ adeo appropinquant, vt ad eum fractura minoribus numeris expressa propius accedere non liceat. Est scilicet

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

vnde nascuntur fracturae ad $\sqrt{3}$ magis magisque appropinquantes $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{71}{41}$, $\frac{97}{56}$ etc. Ex quo perspicitur, nullam aliam fractionem, cuius quidem numerator pariter ac denominator centenarium non excedat, ad quartam ipsius $\sqrt{3}$ partem tam prope accedere, quam $\frac{153}{120}$, prorsus vt demirandum sit, Columellae formulam illi ipsi fractioni, tamquam fundamento, esse superstructam, et sponte sua oriatur quaestio, quanam via auctor formulae ad istum valorem ipsi $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ valde propinquum peruenerit.

4. Ad hanc quaestionem vt aliter quam coniecturali modo respondeatur, res ipsa pati non videtur. Quae igitur iam, vt quaestioni propositae satisfiat, prolaturus sum, maximam partem in coniectura posita sunt, quod eo praemonendum duxi, quo facilius et promtius, apud aequos harum rerum aestimatores, si quid errauerim, veniam impetrem.

Est autem ratio, qua fieri potuit, vt valor $\frac{153}{120}$ in locum ipsius $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ substitutus erueretur, omnino du-

plex. Valor iſte enim aut ex aliis, qui iam noti erant, valoribus, ab iuſto ipſius $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ valore haud notabiliter diuerſis, deriuatus, aut ſine horum ope per ſe inuentus eſt.

Primo indagandi modo in Archimedis libro de dimenſione circuli et Hipparchi tabula, quantitatem rectarum circulo inſcriptarum exhibente, adminicula parata erant, de quibus ſingulatim exponendum.

In Archimedis libro laudato deprehenditur ratio, quam altitudo trianguli aequilateri ad dimidiam baſin habet, cuiusque denominator eſt ipſa radix quadrata ternarii, duabus rationibus, tanquam limitibus, circumſcripta, altera earum veram rationem paullo excedente, altera ab eadem aliquantulum deficiente. Illa eſt 1351 : 780, haec 265 : 153. Ex poſteriori ratio ipſi fere aequalis 26 : 15 hoc pacto deducitur. Quum circiter ſit 265 : 153 = 5 : 3, erit propemodum (Elem. V. 19. VII. 11) 265 : 153 = 260 : 150 = (Elem. V. 15. VII. 17.) 26 : 15. Ex ratione autem 1351 : 780 exiſtit ratio ad ipſam appropinquans 26 : 15 iſto modo. Quoniam ſine errore notabili eſt 1351 : 780 = 1352 : 780 = 26.52 : 15.52, erit vero proxime (Elem. l. poſtremum c.) 1351 : 780 = 26 : 15. Vtrinque igitur efficitur, vt altitudo trianguli aequilateri ad dimidiam baſin, adeoque ſpatium altitudine et dimidia baſi contentum ad quadratum a dimidia baſi factum i. e. area trianguli aequilateri ad quartam partem quadrati lateri propemodum fit = 26 : 15. Quamobrem area perquam prope eſt = $\frac{26}{15}$ dictae quartae, ſiue $\frac{26}{60} = \frac{13}{30}$ quadrati a latere facti, quae eſt ipſa a Columella tradita formula.

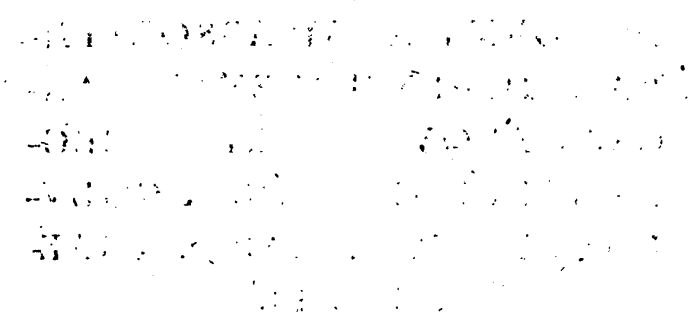
Hipparchi tabula chordarum hodie quidem non extat, ſed ipſi talem aliquam in promtu fuiſſe, ex eo colligere eſt, quod absque eiusmodi tabula ille vir computationes, quas in comperto eſt confeciſſe, neuti-

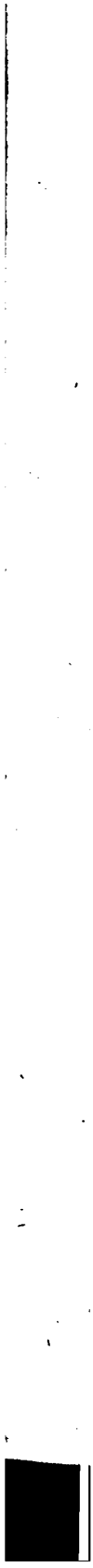
quam inire potuiſſet. Ab ipſo autem ſubtenſarum canonem, qualem primus, quantum conſtat, condidit, in vulgus editum eſſe, ex Theonis teſtimonio conſici poteſt, qui eum duodecim libris inueſtigationem atque vſum (πραγματείαν) rectarum in circulo tradidiſſe refert *). Quamuis enim de canone diſerte non meminit, attamen Hipparchus illum ſubiunxiſſe putandus eſt, quoniam praecepta ab ipſo tradita ſine canone infructuoſiora fuiſſent. Sumto igitur hoc pro certo, Hipparchi tabulam ſubtenſarum olim in medio atque in manibus fuiſſe, ex ea ratio altitudinis trianguli aequilateri ad baſin dimidiam numeris expreſſa depromi potuit. Eſt enim eadem ac ratio, quam ſubtenſa 120 graduum ad ſubtenſam 60 graduum ſiue radium circuli habet **). Haec autem per canonem ſubtenſarum Ptolemaei, quem quidem Hipparchi rationem in adornando atque diſponendo canone ſuo tenuiſſe verisimillimum eſt, reperitur eſſe $= 103 + \frac{4}{60} + \frac{33}{3600} : 60$ i. e. proxime $104 : 60 = 26 : 15$, vnde eadem, quae antea, ſimili plane modo inferuntur.

5. Diſſerendum nunc eſt de modo fractionem $\frac{265}{153}$, vero radicis quadratae ternarii valori proximantem, ſine ſubſidiis, de quibus praec. articul. expoſitum eſt, inueniendi. Haec autem diſputatio eo recidit, vt explicetur, qua ratione Archimedes limites ab ipſo radici quadratae ternarii conſtitutos, et Hipparchus quantitatem ſubtenſae 120 graduum, inueſtigauerit. De priori etſi difficile ſit ſolidum aliquid

*) Εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου βιβλίον ᾱ. ὑπόμνημα p. 39.

**) In ſchemate propoſ. 12. Lib. XIII. Elem. edit. Barrovian. vel Baermannian. ſcilicet eſt, ob angulos ABE, AFB rectos, et angulum BAE communem, triangulum ABE triangulo ABF aequiangulum: quare (Elem. VI. 4) AF : FB = AB : AD (= BE).





l. c.) $7p : 4p \rhd z : p$ fiue $z : p \lhd 7p : 4p$, h. e., $\lhd 7 : 4$. Eadem ratione oſtenditur eſſe

$$z : p \lhd 26 : 15 \lhd 97 : 56 \lhd 362 : 209 \lhd 1351 : 780 \text{ etc.}$$

Porro quoniam $p \rhd u$, fit $p - u = v$, erit $v \rhd \frac{1}{2}p$, at $\lhd \frac{1}{2}p$. Et quia $z : p = 2p - u : p = p + p - u : p$, eſt quoque $z : p = p + v : p$. Deinde quum fit $z : p = 7p - 2u : 4p - u = 5p + 2p - 2u : 3p + p - u$, $2p - 2u$ autem (Elem. V. 6) $= 2(p - u) = 2v$, erit etiam $z : p = 5p + 2v : 3p + v$. Adhibitis ſic deinceps rationibus, quibus ratio $z : p$ antea aequalis demonſtrata eſt, ſimili modo comprobatur eſſe itidem $z : p = 19p + 7v : 11p + 4v = 71p + 26v : 41p + 15v = 265p + 97v : 153p + 56v = 989p + 362v : 571p + 209v$ etc.

Quia igitur $z : p = p + v : p$, ſed ob $p + v \rhd p$, (Elem. V. 8) $p + v : p \rhd p : p$, erit (Elem. V. 13) $z : p \rhd p : p$, i. e. $\rhd 1 : 1$. Dein quum fit (Elem. V. 15) $2v : 2p = v : p$, *alterne* igitur $2v : v = 2p : p$, poſterior ratio autem $\rhd z : p$, eſt (Elem. V. 13) $2v : v \rhd z : p$, hinc (Elem. l. l.) $2v : v \rhd 5p + 2v : 3p + v$, quare *) $5p : 3p \lhd 5p + 2v : 3p + v$ ſiue $5p + 2v : 3p + v \rhd 5p : 3p$, ergo etiam (Elem. l. c.) $z : p \rhd 5p : 3p$, i. e. $\rhd 5 : 3$. Haud abſimili modo demonſtratur eſſe

$$z : p \rhd 19 : 11 \rhd 71 : 41 \rhd 265 : 153 \rhd 989 : 571$$

---

demonſtrationes ex ſolis libri V. Elem. definitionibus ac propoſitionibus deductae, Tubingae 1793 publicauit, §. 45.

*) Differt. laud. §. 48.

Comparent hic duae rationum ſeries, altera rationum ratione ipſius z ad p maiorum, altera rationum hac ipſa ratione minorum. In priore reperitur non modo ratio 26 : 15, qua praeceptum Columellae de area trianguli aequilateri ſupputanda innititur, verum et illa 1351 : 780, ex qua Archimedes rationem ratione, quam circuli diameter ad latus polygoni 96 laterum circulo inſcripti habet, maiorem deduxit. In poſteriore ſerie autem extat ratio 265 : 153, qua idem ille vſus eſt ad exhibendam rationem minorem ea, quae diametro cum latere polygoni 96 laterum circulum circumſcribentis intercedit. Ceterum ſi cui forte methodus expoſita artificioſior quam pro Archimedis ſcientia atque eruditione videatur *), is, vt ſpeciminis tantum cauſa demonſtrationes, quibus Archimedes propoſ. 9. libr. II. de Aequiponderantibus, propoſ. 3 de Conoidibus et Sphaeroidibus, et propoſ. 10. 11que de Helicibus ſeu Spiralibus muniuit, perluſtret atque expendat, quaeſo. Eo enim fiet, vt opinionem ſuam deponat, nihilque tam arduum et ſubtile eſſe intelligat, cui diuinum Archimedis ingenium par non fuerit.

6. Explicatis iis, quae ſuper ratione, qua Archimedes et auctor regulae, aream trianguli aequilateri ex noto latere inueniendi, fractiones vero valori radicis quadratae ternarii appropinquantes indagauerint, cogitantibus nobis probabilia ſunt viſa, agitan-

*) Exemplum rationis duarum quantitatum incommenſurabilium numeris proxime expreſſae extat iam in Ariſtarchi Samii, qui aetate prior eſt Archimede, libro περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποσημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης, prop. VII. p. 582. Vol. III. Operum Wallisii. Ponitur enim $\sqrt{2} : 1 \succ 7 : 5$, fractio $\frac{7}{5}$ autem in iis eſt, quae e fractione continua radicem quadratam binarii ſiſtente euoluuntur.

dum nunc eſſet de modo, quo Hipparchus ſubtenſam 120 graduum numeris expreſſam inuenerit. Sed quoniam haec inueſtigatio ſola extractione radicis quadratae ex $3.60^2 = 10800$ abſoluitur, lectorem ad Theonis *εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου βιβλίον ἀ ὑπόμνημα* remittere poſſumus, ubi pag. 44. docetur, quomodo numeri non quadrati, qualis eſt 10800, radicem proxime veram reperire liceat, quam quidem Theonis rationem etiam Clariſſ. Ideler in ſua *de trigonometria veterum* diſſertatione *) tradidit. Nihil ergo amplius huic circa priorem Columellae formulam diſquiſitioni addimus, quam determinationem erroris, qui in vſu formulae eius committitur. Apparet autem ex artic. praec., fractionem $\frac{26}{15}$ paullo maiorem eſſe radice quadrata ternarii, quare et area trianguli aequilateri ad Columellae regulam computata veram paullulum excedet, exceſſu exiſtente $= \frac{13}{60} aa - \frac{1}{4} aa\sqrt{3}$. Quo autem quantitas erroris melius innoteſcat, eam ad menſuram aliquam communem vulgoque notam reuocemus. Inueſtigemus igitur, quot pedes latus trianguli habere debeat, vt in area uno pede quadrato aberretur. Quo conſtituto cogitur, vt ſit

$$\frac{13}{60} aa - \frac{1}{4} aa\sqrt{3} = 1$$

$$\text{hinc } aa = \frac{60}{26 - 15\sqrt{3}} = 60\,(26 + 15\sqrt{3})$$

$$\text{proinde } a = \sqrt{60(26+15\sqrt{3})} = 9\sqrt{10}+5\sqrt{30}$$
$$= 55,8466268 = 55\tfrac{1}{7}\tfrac{1}{3} \text{ proxime.}$$

Si ergo latus trianguli aequilateri contineat ped. $55\frac{1}{7}\frac{1}{3}$, area ex praeſcripto Columellae inuenta veram vno pede quadrato excedit. Hinc erroris in aliis caſibus facilis eſt taxatio. Accreſcit enim in ratione duplicata laterum, vt, ſi numerus $55\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ pedum in latere

*) Monatl. Correſp. B. XXVI. S. 14.

inſit, e. c., bis, error impleat ſummam 4 p
quadratorum, et ſic de ceteris. Errore autem
pedem quadratum aequante, area ex Columellae
cepto computata eſt $= \frac{1}{2}\frac{3}{8} \cdot 60(26+15\sqrt{3})$
$26(26+15\sqrt{3}) = 676+390\sqrt{3} = 1351,$
ſiue proxime $= 1351\frac{1}{2}$ ped. quadrat.; proinde
eſt duarum tantarum, quantas habet area, quan
lumellae formula praebet, bis millesimas ſeptin
ſimas tertias, quo cognito haud difficile eſt, for
iſti correctionem, ſi qua opus ſit, adhibere.

7) Progredimur iam ad formam, quam
mella auctore et doctore ſequi oportet, ſi area p
nis circuli ſemicirculo haud maioris computand
niat. Aequatis et hic formula exacta atque ea,
e Columellae praecepto deduximus, ſit

$$\left(\frac{bb+hh}{2h}\right)^2 \text{Ang. tang } \frac{2bh}{bb-hh} - \frac{(bb-hh)b}{2h}$$
$$= bh + \frac{1}{2}hh + \frac{1}{12}b$$

ſiue, quia Ang. tang $\frac{2bh}{bb-hh} = 2$ Ang. tang

$$\left(\frac{bb+hh}{h}\right)^2 \text{Ang. tang } \frac{h}{b} - \frac{(bb-hh)b}{h}$$
$$= 2bh + hh + \frac{1}{3}bb.$$

Quum omnium ſegmentorum, ſemicirculum no
cedentium et ſuper eadem recta tamquam baſi c
tutorum, vltimum ſit ſemicirculus ipſe ſuper illa
deſcriptus, primum autem duae rectae ſibi inu
ſuperincidentes, hinc duo conſtituuntur caſus ext
quibus reſpondent anguli ad centrum 180 et o
duum, et quos inter caſus ille, ubi angulus ad cen
eſt 90 graduum, tanquam medius, interponitur.
vero videamus, quid ex aequatione noſtra in hi
ſibus ſingularibus ſelectisque efficiatur. Primum

dem manifeſtum eſt, euaneſcente ſegmenti altitudine fieri $h = b : \infty$, quare habemus

$$\frac{b^3}{h} - \frac{b^3}{k} = o = \tfrac{1}{7} bb$$

quod quum ſit abſurdum, aequatio hoc caſu, niſi ſit et $b = o$, neutiquam ſubſiſtit. Altero caſu, quo angulus ad centrum eſt rectus, ſegmentumque quadrante circumductae et ſubtenſa ipſius continetur, eſt $\frac{h}{b} = \sqrt{2} - 1 = \text{tang } \frac{1}{8}\pi$, denotante π dimidiam peripheriam circuli, cuius radius eſt $= 1$, proinde $h = (\sqrt{2} - 1)\, b$, et $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$, quibus valoribus in aequationem noſtram introductis fit

$$\pi bb - 2bb = 1\tfrac{1}{7} bb.$$

hinc $\pi = 3\frac{1}{7}$. Abeunte tandem ſegmento in ſemicirculum, qui caſus eſt tertius, eſt $b = h$, et aequatio noſtra hoc caſu euadit

$$\pi bb = 3\tfrac{1}{7} bb$$

vnde fit itidem $\pi = 3\frac{1}{7}$.

Numerus pro ipſo π hic erutus eſt vnus ex limitibus ab Archimede denominatori rationis, quam ambitus circuli ad diametrum habet, aſſignatis, idemque fere ſolus veteribus expeditioris et commodioris vſus gratia in computationibus ad circulum pertinentibus vſurpatus *), quamquam Eutocio rufe-

*) Vid. Plin. Hiſt. Nat. II. 23 (21 Harduin.) Macrob. in ſomn. Scip. I. 20. Formulae etiam, quas Columella ad menſurandam circuli et ſemicirculi aream habet, eidem illi numero accommodatae ſunt. Hoc loco non alienum erit monuiſſe, pro numero CLX, quem nouiſſima Clariſſ. Schneideri editio ſcriptorum rei ruſticae in Columellae problemate de ſemicirculo exhibet, ſubſtituendum eſſe CXL, (rectius CXXXX) qui in

rente *) Apollonius Pergaeus Philoque Ga
darenſis rationem iſtam accuratius, verum num
ris maioribus, definierant. Aſſumto ergo hoc ipſius
valore duobus caſibus poſterioribus (nam eius, vbi b
$h = 0$, rationem habere nil attinet,) aequatio ſupr
allata ſtat, ex quo ſequitur, vt in his ipſis caſibus C
lumellae formula a veritate non recedat.

8. Duos caſus, quos modo indicauimus, ſol
eſſe, in quibus Columellae formula veram ſegment
rum aream praebeat, non niſi ratione eius penitu
perſpecta planeque cognita apparere poteſt. Qua
quidem intelligentiam vt conſequamur, eius origine
analyſi inveſtigemus perinde ac ſi formula de i
tegro eſſet condenda.

Inſcripto igitur in portionem circuli, ſemicircu
haud maiorem, triangulo maximo, portio in tres pa
tes diuiditur, quarum vna illud ipſum triangulu
maximum, binarum reliquarum autem vtrauis e
portio circuli ſuper latere trianguli maximi conſtitut
et dimidio arcu portionis ab initio expoſitae compr
henſa. Seruatis iam denominatibnibus artic. 2. ar
trianguli inſcripti, quod cum portione eamdem baſi
atque altitudinem habet, eſt bh. Segmentorum a
tem reliquorum duorum una ſumtorum area fingatu
ita a quantis b et h pendere, vt hac, ad quam per ipſa
Columellae regulam deducimur, forma $mbb + nh$
litteris m et n duos factores conſtantes deſignantibu

Geſneriana prima (annae et in altera, neſcio) legitu
unice que verus eſt. Si enim radius, quem Columel
curuaturae latitudinem dixit, eſt ped. LXX, diametr
a Columella nomine baſeos ſemicirculi inſignita CX
ped. contineat, neceſſe eſt. Mendum vnde ortum tr
xerit, facile eſt ſuſpicatu.

*) In Commentar. ad Archimedis de dimenſion
circuli librum; in Walliſii Opp. Tom. III. p. 157.

exprimatur. Area ergo portionis totius eſt $= bh + mbb + nhh$, in qua forma iam factores m et n determinari oportet. Quod quo expeditius fiat, ſtatuamus radium circuli $= 1$, angulum ad centrum autem, qui dimidio arcui portionis inſiſtit $= \varphi$, eritque $b = \text{fin}\,\varphi\, h = 1 - \text{cof}\,\varphi$, hinc $bh + mbb + nhh = \text{fin}\,\varphi, -\frac{1}{2}\,\text{fin}\,2\varphi + \frac{1}{2}m\,(1 - \text{cof}\,2\varphi) + \frac{1}{2}n\,(3 - 4\,\text{cof}\,\varphi + \text{cof}\,2\varphi)$. Sed area ex praeceptis geometriae inuenitur eſſe $= \varphi - \frac{1}{2}\,\text{fin}\,2\varphi$. Quodſi ergo illa hanc aequiparare debet, neceſſe eſt, vt ſit

$$\text{fin}\,\varphi - \tfrac{1}{2}\,\text{fin}\,2\varphi + \tfrac{1}{2}m\,(1 - \text{cof}\,2\varphi) + \tfrac{1}{2}n\,(3 - 4\,\text{cof}\,\varphi + \text{cof}\,2\varphi) = \varphi - \tfrac{1}{2}\,\text{fin}\,2\varphi$$

proinde

$$m(1 - \text{cof}\,2\varphi) + n(3 - 4\,\text{cof}\,\varphi + \text{cof}\,2\varphi) = 2\varphi - 2\,\text{fin}\,\varphi \quad (\odot)$$

Quum hic duo tantum coefficientes, m et n, ſint determinandi, plures duobus ipſius φ valoribus, ad hanc determinationem abſoluendam, adhibere non licet. Quia igitur aequatio charactere ſolis ($\odot$) ſignata iam ad valorem $\varphi = 0$, quo caſu eſt b et $h = 0$, ſegmentumque euaneſcit, ſponte quadrat, deligantur propoſito adſequendo valores $\varphi = 45° = \frac{1}{4}\pi$, et $\varphi = 90° = \frac{1}{2}\pi$ angulis ad centrum ſummam 90 et 180 gradum conficientibus. His conſtitutis habetur

$$\text{I.}\quad m + n(3 - 2\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{2}$$

$$\text{II.}\quad 2m + 2n = \pi - 2.$$

Aequatione I in 2 ducta et, quae prodit, ab aequatione II ablata, relinquitur

$$4n(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{hinc}\quad n = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Quo valore ipſius n in aequatione II. ſubſtituto, fit

$$2m + 1 = \pi - 2$$

$$\text{proinde}\quad m = \frac{\pi - 3}{2}.$$

Determinatis ſic ipſorum m et n valoribus formula ad exhibendam aream ſegmenti circularis paullo ante aſſumta $bh + mbb + nhh$ valorum iſtorum introductione

abit in hanc $bh + \frac{1}{2}hh + \frac{\pi - 3}{2} bb$, in qua si statuamus $\pi = \frac{22}{7}$, in eam ipsam formulam, quae Columellae praescripto conuenit, incidimus. Quare dubium esse non potest, quin eius veram originem hoc pacto explorauerimus.

Quum itaque formula $bh + mbb + nhh$ duobus tantum casibus exactae aequipollens facta sit, facile perspicitur, formulam, quae sic elicita est, $bh + \frac{1}{2}hh + \frac{\pi - 3}{2} bb$, ita fore comparatam, vt duobus istis casibus solis iustam segmentorum mensuram reddat, in ceteris omnibus autem de veritate deflectat. Quod, quo extra omnem dubitationis aleam ponatur, peculiari insuper demonstratione corroborari expedit.

9. Substituantur igitur in aequatione (⊙) artic. praeced. pro ipsis m et n valores eorum modo reperti, quo facto erit

$$2\varphi - 2\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos 2\varphi = \tfrac{\pi}{2}(1 - \cos 2\varphi). \quad (\S)$$

vnde fit

$$\pi = \frac{4(\varphi - \sin\varphi + \cos\varphi - \cos 2\varphi)}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Ex hac formula, si ipsi φ valorem quemcunque tribuere licet, cognitur, vt π fit quantitas variabilis, qualis tamen non est, sed vel maxime constans. Quo ergo haec incongruentia tollatur, in aequatione (§) valor ipsius π indeterminatus permaneat, aequatioque subsistat, quicquid demum sit π, oportet. Quare quum tantummodo membrum 2φ ex sua vi atque natura ad ipsum $\frac{\pi}{2}$ referri, cumque eo comparari possit, necesse est, hasce duas aequationes,

$$2\varphi = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad (\mathrm{I})$$

$$2\cos\varphi - 2\sin\varphi - 2\cos 2\varphi = 0, \quad (\mathrm{II})$$

quarum additione aequatio (C) conflatur, pro ſe quamque ſubſiſtere. Ex aequatione (II) autem fit

$$\text{cof}\varphi - \text{fin}\varphi = \text{cof}\,2\varphi = \text{cof}\varphi^2 - \text{fin}\varphi^2$$

cuius aequationis quum vtraque pars per $\text{cof}\varphi - \text{fin}\varphi$ diuidi poſſit, habemus primum

$$\text{cof}\varphi - \text{fin}\varphi = 0$$

ſiue $\text{cof}\varphi = \text{fin}\varphi$

i. e., quoniam valores φ ipſo π maiores, aeque ac negatiui, excluduntur

$$\text{fin}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \text{fin}\varphi$$

hinc fit $\varphi = \tfrac{1}{4}\pi$.

Deinde vero diuiſione aequationis $\text{cof}\varphi - \text{fin}\varphi = \text{cof}\varphi^2 - \text{fin}\varphi^2$ re ipſa inſtituta, peractaque eſt

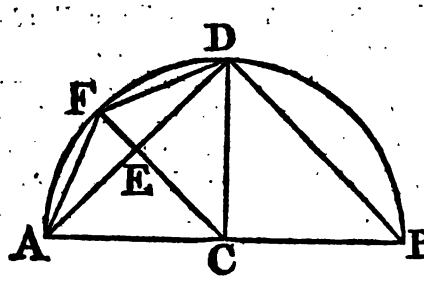
$$1 = \text{cof}\varphi + \text{fin}\varphi$$

vnde non modo

$\frac{1 - \text{cof}\varphi}{\text{fin}\varphi}$, ſed et $\frac{\text{cof}\varphi}{1 - \text{fin}\varphi} = 1 = \text{tang}\,\frac{1}{4}\pi$ prodit.

Quocirca, quum ſit $\frac{1 - \text{cof}\varphi}{\text{fin}\varphi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$, $\frac{\text{cof}\varphi}{1 - \text{fin}\varphi} = \text{tang}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi)$, erit tam $\frac{1}{2}\varphi$, quam $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}\pi$, ergo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et 0. Valoribus $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ iam in aequationem I. introductis ex ea exiſtit $0 = 0$; $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$; $\pi = \pi$. Quare ambae aequationes I et II ipſo φ valores 0, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ obtinente valent, hique ſoli ſunt, quibus id efficitur.

10. Inueſtigata origine formulae a Columella ad menſurationem ſegmenti circularis praeſcriptae calculi litteralis ſubſidio, iam conabimur rationem adumbrare, quam illius formulae auctor geometriae ſolius auxilio adiutus in ea inuenienda fortaſſe ſecutus eſt.



Sit igitur ADB semicirculus, cuius centrum C, diameter AB, erectoque in C ad AB perpendiculo CD, ducantur AD et DB, quo facto erit (Elem. I. 4) AD = DB, et (Elem. I. 47) $AD^q = DB^q = 2AC^q$. Demisso dein ex C ad AB perpendiculo CE, productoque eo vsque ad peripheriam in F, iungantur AF, FD. Quia igitur recta CF per centrum C tranſiens rectam AD ad angulos rectos ſecat, eſt (Elem. III. 3) AE = ED, hinc (Elem. I. 8.) ACE = ECD = ½ recti = DAC, proinde (Elem. I. 6.) AE = EC = ED = ½ AD, ergo AE^q ſiue $DE^q = \frac{1}{4} AD^q = \frac{1}{2} AC^q$. Praeterea eſt (Elem. I. 4.) AF = FD, et Δ AFC = Δ CFD. Sumto iam, diametrum ſe habere ad peripheriam, vt 7 ad 22, erit (vi Prop. III. libr. Archimedis de dimenſ. circ.) circulus, cuius dimidium ADB, $= \frac{1}{14} AB^q = \frac{2}{7} AC^q$, hinc ſemicirculus $ADB = \frac{11}{14} AC^q = AC^q + \frac{1}{2} AC^q + \frac{1}{14} AC^q$ *) = Δ ADB + ½ CD^q + $\frac{1}{14} AC^q$. Porro quum quadrans ACD fit = $\frac{11}{14} AC^q$, Δ ADC autem = 2 Δ FDC — Δ AFD = CF × DE — Δ AFD = CF × CE — Δ AFD, eſt ſegmentum AFD = Δ AFD +

*) Veteres, nominatim Graeci, vti videre eſt apud Archimedem, Ptolemaeum, Geminum, Eutocium et Theonem, ob incommodam praeſertim, qua utebantur, numerorum notandorum rationem in deſignandis minutiis hunc morem tenebant, vt, quotiescumque fieri poſſet, fractionem, numeratorem ab unitate diuerſum habentem, ſemper in duas vel plures fractiones, quarum numeratores eſſent = 1, dirimerent, eamque ſic diſtributam efferrent. Haec diſcerptio hic in vſum tracta eſt.

$\frac{1}{4}\frac{1}{4}$ AC^q — CF × CE. Sed in Δ FDC eſt (Elem. II. 13) DF^q + 2 CF × CE, ſiue DE^q + EF^q + 2 CF × CE = CD^q + CF^q, i. e., = 2 AC^q, ergo 2 CF × CE = 2 AC^q — DE^q — EF^q = $\frac{1}{2}$ AC^q — EF^q, proinde CF × CE = $\frac{1}{4}$ AC^q — $\frac{1}{2}$ EF^q. Quamobrem erit ſegmentum AFD = Δ AFD + $\frac{1}{2}$ EF^q + $\frac{1}{7}\frac{1}{4}$ AC^q — $\frac{1}{8}$ AC^q = Δ AFD + $\frac{1}{2}$ EF^q + $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ AC^q = Δ AFD + $\frac{1}{2}$ EF^q + $\frac{1}{7}\frac{1}{4}$ AE^q.

Quum itaque ſemicirculus ADB ex triangulo ſibi inſcripto maximo ADB, et quadratis ab eius altitudine CD et dimidia baſi AC factis, eodem plane modo componatur, ac ſegmentum AFD quadranti competens, ex triangulo maximo ſibi inſcripto AFD, et quadratis altitudinis EF et dimidiae baſis AE, numeris, per quos ſpatia a lineis cognominibus deſcripta multiplicanda veniunt, in vtroque caſu iisdem exiſtentibus, patet, quomodo, ſemicirculo pro ſegmento habito, formula inde deduci atque condi potuerit ad aream ſegmenti circularis cuiuslibet inueniendam, quae haud ſcio an ab auctore pro vniuerſali putata fuerit, quum reuera duobus dumtaxat ſegmentis accommodata ſit.

11. Reſtat, vt de errore videamus, cui formula Columellae obnoxia eſt. Cuius quidem ratio ac tenor expeditius iuxta planiusque explicari non poſſe nobis viſa ſunt, quam tabula hic ſubiecta, quae quantitatem erroris iſtius pro valoribus denominatoris rationis, quam altitudo ſegmenti ad dimidiam baſin habet, intra nihilum et vnitatem ſubſiſtentibus, et parte decima unitatis a ſe inuicem differentibus, ob oculos ponit

$\frac{h}{b}$	$\frac{S}{bb}$	$\frac{\Sigma}{bb}$	$\frac{\Sigma - S}{bb}$	$\frac{\Sigma - S}{\Sigma}$
0, 0	0, 000000	0, 070796	0, 070796	1, 000000
0, 1	0, 133600	0, 175796	0, 042196	0, 240032
0, 2	0, 268788	0, 290796	0, 022008	0, 075683
0, 3	0, 407110	0, 415796	0, 008686	0, 020891
0, 4	0, 550029	0, 550796	0, 000767	0, 001392
			$\frac{S - \Sigma}{bb}$	$\frac{S - \Sigma}{\Sigma}$
0, 5	0, 698899	0, 695796	0, 003103	0, 004459
0, 6	0, 854944	0, 850796	0, 004148	0, 004875
0, 7	1, 019258	1, 015796	0, 003462	0, 003408
0, 8	1, 192799	1, 190796	0, 002003	0, 001682
0, 9	1, 376405	1, 375796	0, 000608	0, 000442
1, 0	1, 570796	1, 570796	0, 000000	0, 000000.

Vt de vi ac poteſtate numerorum in hac tabula obuiorum penitus conſtet, notari conuenit, ſignorum S et Σ, quae in ea praeter iam uſurpata *b* et *h* occurrunt, prius aream veram, poſterius autem aream ex Columellae formula computatam, cum eo tamen, vt pro ipſius π valore numerus 3,1415926 loco illius $\frac{22}{7}$ adhibeatur, nobis deſignare.

Numerus igitur, qui ad ſiniſtram in ingreſſu laterali tabulae inuenitur, eſt denominator rationis, quam altitudo ſegmenti ad dimidiam baſin ipſius habet. Qui huic ſunt deinceps in eodem verſu adiuncti numeri, eorum primus, quota pars quadrati a dimidia baſi facti ſit area vera, indicat, ſecundus hoc ipſum de area ad Columellae formulam computata manifeſtat, tertius differentiae, quae inter vtramque aream intercedit, ad quadratum dimidiae baſeos rationem oſtendit, quartus denique errorem formulae Columellianae cum area ex ipſa ſupputata comparat, quotumque ex diuiſione illius per hanc ortum exhibet.

Sed quo dispositio tabulae planissime intelligatur, haud inconsultum fuerit, vsum eius exemplo illustrare, quod ex problemate ab ipso Columella prolato capiamus. Quaeritur autem in eo area portionis circuli, cuius basis 16, altitudo vero 4 pedes habet. Est igitur $b = 8$, $h = 4$, proinde $\frac{h}{b} = \frac{4}{8} = 0,5$; hinc $\frac{S}{bb} = 0,698899$; $\frac{\Sigma}{bb} = 0,695796$. Quare erit area vera $S = \frac{S}{bb} . bb = 64 . 0,698899 = 44,7295$ ped. quadr., area autem ad Columellae formulam ratiocinata $\Sigma = 64 . 0,695796 = 44,5309$ ped. quadr., pro quo numero Columella ob minutiarum neglectum 44 tantum elicit. Excessus ergo areae verae super aream, quam Columellae forma praebet, est $= 0,1986$ ped. quadr. $= 64 . 0,003103 = \frac{4473}{1000000} . 44,5309$ siue circiter $\frac{2}{225}$ areae proxime dictae.

Monstrat insuper tabula, Columellae formulam ipso $\frac{h}{b}$ valores inde a 0, 0 ad 0, 3 vsque tenente aream praebere plus a vera recedentem, quam vt errorem inde oriundum tuto negligere liceat. Consultius ergo videtur vsum illius certis circumscribere limitibus, eumque ad valores ipsius $\frac{h}{b}$, qui intra 0,4 et unitatem consistunt, adstringere. Prior horum valorum paullulum modo distat ab uno eorum, pro quibus Columellae formulam exactae aequipollere supra vidimus, quique sunt $-1 + \sqrt{2}$ siue proxime $\frac{5}{12}$ et 1, posterior cum altero eorum prorsus conuenit. Limites igitur, extra quos usum formulae extendere non expedit, sic quoque constitui possunt, vt vnus eorum sit segmentum anguli, qui sesquialter est recti, capax, alter vero segmentum angulum capiens rectum siue

ſemicirculus. Intra hos limites, vti videre eſt in prae cedenti tabula, area ex praeſcripto Columellae ſuppu tata ſemper iuſto minor eſt, maximaque differenti qua a vera aberrat, obtinet ipſo $\frac{h}{b}$ valorem 0,6 cir citer habente. Ad eam accuratius definiendam ſumt inter veram aream illamque, quam Columellae regul offert, differentia habetur

$$2(S-\Sigma) = \left(\frac{bb+hh}{h}\right)^2 \text{Ang. tang} \frac{h}{b} - \frac{b^3}{h} - b$$
$$-hh-(\pi-3)bb$$

Facto iam $\frac{h}{b} = q$, forma praecedens transmutatu in hanc

$$\frac{2(S-\Sigma)}{bb} = \left(\frac{1+qq}{q}\right)^2 \text{Ang. tang} q - \frac{1}{q} - q$$
$$-qq-(\pi-3$$

unde fit poſito $\frac{2(S-\Sigma)}{bb} = V$

$$\frac{dV}{dq} = \frac{2}{qq} - 2q - \frac{2(1+qq)(1-qq)}{q^3} \text{Ang. tang } q$$

Hinc adaequato ſecundum maximorum et minimoru methodum exponente differentiali $\frac{dV}{dq}$ cifrae aequat determinando ipſius V adeoque $S-\Sigma$ valori m ximo eſt

$$(1+qq)(1-qq) \text{ Ang. tang } q = q(1-q^3)$$

cui quidem valoribus 0 et 1 ipſius q vltro ſatisf Verum quum pro illo differentiam $\Sigma-S$ fieri ma mam, pro hoc autem ad nihilum redigi ex antecede ſibus conſtet, poſthabitis iſtis valoribus alius val ipſius q, idemque hic requiſitus eruendus eſt ex a quatione

$$\text{Ang. tang } q = \frac{q(1+q+qq)}{(1+q)(1+qq)}$$

$$= q - \frac{q^4}{(1+q)(1+qq)}$$

quae introducto, quem ſupra (art. 8) in ſubſidium adhibuimus, angulo φ, quo nomine eſt $q = \text{tang } \frac{1}{2}\varphi$, abit in ſequentem:

$$\varphi = 2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{\text{ſin } \frac{1}{2}\varphi^3 . \text{ tang } \frac{1}{2}\varphi . \sqrt{2}}{\text{ſin}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}$$

Quoniam itaque valor ipſius q, ad quem intendimus, prope iam notus eſt, aequalis quippe $= 0,6$; cui reſpondet valor ipſius $\frac{1}{2}\varphi = 30^\circ\ 58'$, fine multo negotio aliquot tentaminibus faciendis φ exactius determinatur. Reperiuntur autem valores ipſius $\frac{1}{2}\varphi$ atque q, quibus reſpondet maximus ipſius $S - \Sigma$ valor, eſſe hi: $\frac{1}{2}\varphi = 30^\circ\ 59' 6'', 57$; $q = 0,6005081$. Tum in caſu maximi valoris ipſius $S - \Sigma$ eſt

$$\frac{2(S-\Sigma)}{bb} = \left(\frac{1+qq}{q}\right)^2 \frac{q(1+q+qq)}{(1+q)(1+qq)} - \frac{1}{q} - q - qq - (\pi - 3)$$

$$= \frac{q(1-q)}{1+q} - (\pi - 3)$$

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi \text{ tang } (45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) - (\pi - 3)$$

Ratione inita ſubductaque inuenitur, errore $S - \Sigma$ maximum, quem habere poteſt, valorem tenente, $\frac{S-\Sigma}{bb} = 0,0041481$. Ex quo efficitur, vt in computatione areae ſegmenti circularis, cuius baſis eſt 31,054 pedum, et altitudo non minor quincunce baſeos, ſecundum Columellae regulam inſtituta ad ſummum uno pede quadr. a vera area aberrari poſſit. Hinc erroris maximi quantitas, quae in genere eſt vt quadratum baſeos, in aliis caſibus, quibus ratio altitudinis ſegmenti ad dimidiam baſin limites conſtitutos haud egreditur, facile indagatur.

Ex tabula praemiſſa porro hoc perſpicitur, quotum $\frac{S-\Sigma}{\Sigma}$ primum creſcere, deinde rurſus decre-

ſcere, maximumque fieri, quando $\frac{h}{b}$ fere valorem habet. Vt exactius, quam tabula fieri poteſt, co ſcatur quum valor maximus ipſius $\frac{S-\Sigma}{\Sigma}$, tum ipſius $\frac{h}{b}$, cui ille reſpondet, methodus maxim et minimorum denuo in ſubſidium vocanda eſt, ad ea, quae quaeruntur, eruenda ſubminiſtra quationem

$$\Sigma dS = \Sigma dS$$

h. e. ſubſtitutis valoribus ipſorum Σ, dS, S, d troductaque iterum quantitate q

$$\left[\tfrac{1}{2}(\pi-3)+q+\tfrac{1}{2}qq\right]\times \left[\frac{1}{qq}+1-\frac{(1+qq)(1-qq)}{q^3}\right]\text{Ang. tan}$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{1+qq}{q}\right)^2\text{Ang tang}q-\frac{1}{2q}+\tfrac{1}{2}q\right]\times($$

ex qua exiſtit

$$\text{Ang. tang}\,q=\frac{q(\pi-3+3q+(\pi-1)qq+q}{(1+q)(1+qq)(\pi-3+(6-\pi)q-}$$

ſiue $\varphi = 2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi - \frac{\text{fin}\,\frac{1}{2}\varphi^3\sqrt{2}}{\text{fin}(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)}\cdot$

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi+(5-\pi)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2-\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^3-(\pi-}{\pi-3+(6-\pi)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi-\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2}$$

vnde adhibita poſitione prope veri poſt pauca t menta inuenitur $\frac{1}{2}\varphi = 29^\circ\,13'\,37''$, 263. Hinc dit $\frac{h}{b} = q = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = 0{,}5595000$. Huic valori ipſius $\frac{h}{b}$ reſpondere reperitur $\frac{S}{bb} = 0{,}790$

$\frac{\Sigma}{bb} = 0,7868165$; proinde valor maximus ipsius $\frac{S-\Sigma}{\Sigma} = \frac{1}{7}\frac{2}{8}\frac{2}{8}\frac{2}{1}\frac{9}{8}\frac{}{7} = 0,0050736$, minor ergo quam $\frac{1}{197}$ (= 0,0050761).

Explorato valore maximo ipsius $\frac{S-\Sigma}{\Sigma}$ habetur quoque maximus valor ipsius $\frac{S-\Sigma}{S}$. Quia enim $\frac{S-\Sigma}{\Sigma} = \frac{S}{\Sigma} - 1$, erit in casu quoti $\frac{S-\Sigma}{\Sigma}$ maximi etiam quotus $\frac{S}{\Sigma}$ maximus, proinde $\frac{\Sigma}{S}$ minimus, ergo $\frac{S-\Sigma}{S} = 1 - \frac{\Sigma}{S}$ maximus. Erit igitur maximus ipsius $\frac{S-\Sigma}{S}$ valor $= \frac{1}{7}\frac{9}{8}\frac{2}{8}\frac{3}{8}\frac{0}{7} = 0,0050480$, minor itaque quam $\frac{1}{198}$ (= 0,0050505).

Quibus ex omnibus sequitur, errorem formulae a Columella ad inuenienda aream portionis circuli, semicirculo minoris, praescriptae, si vsus eius limitibus ipsius $\frac{h}{b}$ supra constitutis, $\frac{1}{72}$ et 1, terminetur, numquam $\frac{1}{197}$ areae ex ipsa computatae siue $\frac{1}{198}$ areae verae excedere, planeque etiam a nobis adhiberi posse istam formulam, vbi partem centesimam nonagesimam septimam areae secundum ipsam supputatae nihili pendere licet.

12. Quae hactenus de formulis in dimensione trianguli aequilateri et segmenti circularis auctore Columella sequendis a nobis tradita sunt atque expositа, lectores meliora de iis edocebunt, quam quae

Hambergerus a Geſnero *) ſuper his ipſis formulis interrogatus, in medium attulit. De priore recte quidem ſtatuit, aream per ipſam non niſi veram proximam inueniri, ſed quae ad alteram Geſneri de eadem formula interrogationem reſpondet, a propoſito plane ſunt aliena. Poſtericris formulae autem, quae de inuenienda ſegmenti circuli magnitudine agit, rationem omnino non eſt aſſecutus, vti ex eo intelligi poteſt, quod illam in eo ſolo caſu, vbi altitudo ſegmenti eſt tantarum partium $\frac{h}{b}$, quantae inſunt in baſi 16, ergo $= 0,5$, veram magnitudinem dare aſſerit, cuius quippe contrarium ex antecedentibus conſtat. Nec minus Kaeſtneri tum vera eiusdem formulae indoles latuit, id quod ex ipſius de illa iudicio **) colligitur. Ceterum formula Columellae ad menſurationem trianguli aequilateri ſpectans a recentioribus quoque geometriae practicae auctoribus iterata et tradita eſt, veluti Clauio ***) atque Adriano Metio ****).

13. Corollarii loco addemus huic commentationi formulas aliquot, quibus, absque canonis trigonometrici auxilio, dimenſionem ſegmenti circularis, ſemicirculo minoris, vero quidem nonniſi proxime, ſatis ta-

*) Temperare mihi non poſſum, quin confeſſionis Geſneri hac occaſione de ſe ipſo prolatae, qua ſe minus quam vellet in erudito illo paluere verſatum eſſe, dicit, mentionem inſiciam. Elucet quippe ex ea ſummum ipſius circa diſciplinas mathematicas ſtudium, a Kaeſtnero idemtidem praedicatum et collaudatum, qui illum hac in re cum Melanchthone, communi Germaniae praeceptore, comparat, quem Voſſius (de Mathef. nat. et conſtit. cap. XXVI. §. 13.) refert dicere fuiſſe ſolitum, ſe grandi illa, qua tum eſſet, aetate Herlini fore auditorem, ſi Argentinae (vbi Herlinus matheſin docebat) viueret.

**) Elem. trigonometr. plan. propoſ. 18. XIII.

***) Geometr. pract. Lib. IV. cap. II. §. 5.

****) Geometr. practic. Part. II. cap. III. §. 5.

men accurate peragere datur, primumque eas exhibebimus, quae aream S per altitudinem h atque dimidiam basin segmenti b expressam fistunt. Sunt autem istae:

$$S = \tfrac{4}{3}bh\left(\frac{5bb}{5bb-hh}\right) - \frac{16}{175}\cdot\frac{h^5}{b^3} + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3}bh\left(\frac{35bb+12hh}{35bb+5hh}\right) + \frac{16}{2205}\cdot\frac{h^7}{b^5} - \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3}bh\left(\frac{315b^4+133bbhh}{315b^4+70bbhh-5h^4}\right) - \frac{512}{218295}\cdot\frac{h^9}{b^7} + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3}bh\left(\frac{1155b^4+861bbhh+128h^4}{1155b^4+630bbhh+35h^4}\right) + \frac{512}{1486485}\cdot\frac{h^{11}}{b^9} - \text{etc.}$$

Derivatae sunt hae expressiones ex serie aream segmenti exhibente $\frac{4}{3}bh + \frac{4}{1.3.5}\cdot\frac{h^3}{b} - \frac{4}{3.5.7}\cdot\frac{h^5}{b^3} + \frac{4}{5.7.9}\cdot\frac{h^7}{b^5} - \frac{4}{7.9.11}\cdot\frac{h^9}{b^7} + \text{etc.}$ atque sic comparatae, vt earum quaeuis vlterior aream exactius, quam superiores, praebeat. In ipsa areae computatione primum solummodo earum membrum adhibetur, altero dumtaxat inseruiente ad rationem gradus veritatis, quem per primum consequi liceat, subducendam. Quodsi vero quotus $\frac{h}{b}$ sit maior, quam vt vel postrema formularum praecedentium ad aream satis exacte computandam idonea sit, factis $\frac{bb-hh}{2h} = b'$ et $\frac{(b-h)^2}{2h} = h'$, supputetur area S' segmenti, cuius dimidia basis $= b'$, altitudo vero $= h'$, atque erit

$$S = \tfrac{1}{2}\pi(b+h')^2 - 2bb' - S'$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi(b'+h)^2 - 2bb' - S'$$

Quo formularum allatarum vſus clarius pateat, haud incongruens fuerit, exemplum eius apponere. Sit igitur inuenienda area ſegmenti circularis, cuius baſis eſt 7 pedum, altitudo unius pedis. Quia ergo eſt $\frac{h}{b} = \frac{2}{7}$, erit $\frac{h^7}{b^5} = \frac{h^5}{b^5} . hh = (\frac{2}{7})^5$. Sed eſt $\frac{2}{7} > 0,28$ et $< 0,29$, ergo $(\frac{2}{7})^5 > 0,00172$ et $< 0,00205$ *), quare $\frac{16}{2205} . \frac{h^7}{b^5} > 0,000012$ et $< 0,000014$; proinde area ex formula ſecunda computata in quatuor prioribus figuris decimalibus verae congruit. Quamobrem area quaeſita eſt $= \frac{14}{3} . \frac{1763}{1733} = \frac{14}{3} (1 + \frac{28}{1733}) = 4,6667 + 0,0753 = 4,7420$ ped. quadrat. — Exemplum propoſitum habetur in Clariſſ. Mayeri *Stereometr. pract.* ſiue *Geometr. pract. Part.* V. §. 31. *nro.* VII, vbi quaeritur ſoliditas portionis cylindri, quae pro baſi vtraque habet ſegmentum modo menſuratum, altitudinem vero 12 ped. Soliditas requiſita igitur eſt $= 4,7420 . 12 = 56,904$ ped. cubic.

Dicta chorda dimidii arcus, quo ſegmentum finitur, c, rectaque, quae ab extremitate baſeos ad punctum biſſectionis ſagittae ſeu altitudinis ſegmenti ducitur, k, erit etiam

$$S = \frac{4}{3} h \left(\frac{3b + 2c}{5}\right) + \frac{1}{35} . \frac{h^5}{c^3} - \text{etc.}$$

$$= \frac{4}{3} h \left(\frac{c + 4k}{5}\right) + \frac{1}{280} . \frac{h^5}{c^3} - \text{etc.}$$

---

*) Depromti ſunt hi numeri e tabula dignitatum partium unitatis centeſimalium, quae extat inter eas, quas Lambertus ſub titulo: *Zuſätze zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen*, Berol. 1770 publicauit. Recudi illam curauit Schulzius in collectionis tabularum logarithmicarum, trigonometricarum aliarumque a ſe editae Vol. II. p. 278 – 81. Sed tabula haud omnino mendis caret, quorum nonnulla vulgata ſunt a Vega ad calcem praelect. mathem. Voll. II.

Duae hae formulae debentur Newtono. Vid. ipſius *Opuſc. T. I.* p. 322 et Walliſii *Opp.* Vol. II. p. 388. Ad ſimilitudinem earum habetur quoque

$$S = \tfrac{4}{3} h \left(\frac{6c + 32k - 3b}{35} \right) - \tfrac{1}{1050} \cdot \frac{h^7}{c^3} + \text{etc.}$$

Ductae vero ſunt expreſſiones modo prolatae ex ſerie aream ſegmenti exprimente $\tfrac{4}{3} ch - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \frac{h^3}{c} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{h^5}{c^3} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{h^7}{c^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{h^9}{c^7} - \text{etc.}$

Agmen harum formularum ad aream veram ſegmenti circularis appropinquantium claudant ſequentes duae

$$S = \tfrac{4}{3} h \left(\frac{3b + \sqrt{7(7bb + 4hh)}}{10} \right) + \tfrac{4}{2250} \cdot \frac{h^7}{b^5} - \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3} h \left(\frac{4c + 3\sqrt{7(cc - 5hh)}}{25} \right) - \tfrac{1}{441} \cdot \frac{h^7}{c^5} + \text{etc.}$$

quarum poſteriorem Huttonus in libro, quem inſcripſit: *Menſuration*, p. 107 tradidit.

De reliquo ſeries $\tfrac{4}{3} bh + \tfrac{4}{15} \cdot \frac{h^3}{b} - \tfrac{4}{1050} \cdot \frac{h^5}{b^3} + \text{etc.}$ euidenter monſtrat, formam $bh + mbb + nhh$, minus aptam eſſe ad aream ſegmenti circularis repraeſentendam: haecque diſconuenientia eſt cauſa magnae diſcrepantiae, quam pro valoribus $\frac{h}{b}$ ad 0 accedentibus inter aream veram et illam, quam Columellae formula praebet, intercedere ſupra animaduertimus.

AD CLARISSIMVM

IO. GOTTL. SCHNEIDERVM

SAXONEM

PROFESSOREM VRATISLAVIENSEM

EPISTOLA

SVPER

EPAPHRODITI ET VITRVVII RVFI EXCERPTIS GEOMETRICIS.

[redacted]

pendii cauſa paragraphos in Schotti exemplari extantes notis numeralibus Romanis deſignare, quo ab articulis, in quos Haſius excerpta a ſe euulgata diſpertitus eſt, quosque cum ipſo characteribus numerorum vulgaribus notabo, diſtinguantur. His praefatis ad rem venio.

§. I. = art. 8. 9. (2). 10. (1). 11. praemiſſis appellationibus laterum trianguli rectanguli ex datis duobus quibusvis eorum reliquum inuenire docet. Idem edocemur a Boëthio in Geom. lib. II. rubrica altera de trigono orthogonio p. 1524. *), et a Ger-

*) Vſus ſum editione operum Boëthii, quae curâ Henrici Glareani Baſileae ex officina Henricpetrina 1570 prodiit. Ad manus praeterea fuit Venetiana operum Boëthii editio anno 1491 publicata. Vtraque duos libros geometriae Boëthii exhibet, figuris ſat nitidis illuſtratos, quod ideo monendum duxi, quia Kaeſtnerus (*Geſch. der Math. B. I. S.* 282.) vnius dumtaxat libri, primi ſcilicet, quem ſolum videre ipſi contigit, recenſum dedit. Editus eſt liber iſte ſeparatim ſine figuris vna cum textu de Sphaera Joan. de Sacroboſco, commentariis Jacobi Fabri Stapulenſis illuſtrato, primumque prelo Henrici Stephani (aui) excuſus. Hanc eius editionem colluſtrare mihi licuit. Extat in volumine Bibliothecae Paulinae Lipſienſis, quod maximam partem opera Jacobi complectitur, et inprimis ob id notabile eſt, quod in eo, ſi non primus omnium, at certe vnus ex primis libris, qui typis Henrici Stephani impreſſi ſunt, deprehenditur. Continentur hoc libro: Jacobi Fabri introductio in arithmeticam Boëthii, et Caroli Bouilli Veromandii opuſcula quaedam geometrica, (quae inter eſt liber de quadratura circuli, in quo Walliſius cycloidem inueniſſe fruſtra ſibi perſuaſit. Opp. Tom. III. p. 676.) perſpectiua introductio et inſuper Aſtronomicon eiusdem auctoris. In vltima pagina, quae eſt auerſa fol. CXI. legitur: *Id opus impreſſerunt Volphgangus hopilius et Henricus ſtephanus, ea in arte ſocii in Almo Pariſiorum ſtudio Anno Chriſti Celorum totiusque na-*

bertо Geometr.*) cap. XI
eum, quo formulae tradita
ceptorum minus abſone q
attamen nec ſatis accurate e

§. II. et III. = art. 16
metiri monſtrant. Formula
bes apud Boëthium p. 1535.
Gerbertum c. LXXXI. ſed
dinem eius, ad quam dime
cati inſtituitur, quaque Bo
tus c. LXIV. in ſimili probl
appropinquationem tantum
Ceterum omnino eo modo
ſius eas edendas curauit,
DCCC verba omiſſa: *fa*
vnum, id eſt, DCCCL *et*
dimidia, fit DCCC, inſe

§. IV. = art. 18. 19.
guli, inter quas monſtrum
lelogrammus, pro quo tr
tui debet, occurrit, oſt
data baſi et latere triangu
inuenta, area inueſtigari q
apud Boëthium p. 1521. e
bertum, qui ſpecies trian
perſecutus eſt, c. VII. et
1521. et Gerbertus c. XLI

---

turae conditoris 1503. *L*
Ceterum liber ſecundus ge
editione perperam ex Euch
in toto Elementorum opere
ceptionum, quibus iſte libe

*) Edita a Pezio in
siſſimo. Cf. de ea Kaeſtne
tu c l a *Hiſt. des mathem.* T

lateri ex dato ipſius latere inuenienda praecipiunt, vbi notandum venit, rationem altitudinis trianguli aequilateri ad dimidiam baſin ſtatui ab illis = 26 : 15, eamdem nimirum, quae in Columellae formula menſurandi trianguli aequilateri aſſumta eſt. *)

§. V. = art. 20. praeceptum eſt parallelogrami rectanguli diagonalem datis eius lateribus inueniendi. Eadem regula, quae nonniſi repetitio primae in §. I. propoſitae eſt, datur a Boëthio p. 1530., a Gerberto c. XCII.

§. VI. = art. 21. traditur ratio, trianguli altitudinem ex datis tribus lateribus, adeoque aream in eo caſu inueniendi, quo anguli ad baſin ſunt acuti, et perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum intra trianguli ſpatium cadit. Boëthius idem problema p. 1523., Gerbertus c. LI. ſoluit. Solutionis fundamentum eſt prop. 13. libr. II. Elem. a recentioribus etiam huic problemati ſoluendo adhibita **), per quam alterutrum ſegmentorum baſeos a perpendiculo factorum quaeritur, quo inuento perpendiculum ipſum per theorema Pythagoricum eruitur. — Excerpta Haſii art. 23. idem problema alio exemplo illuſtratum exhibent, quod etiam a Boëthio p. 1527. et Gerberto c. XLIV. et LVI. prolatum eſt, atque eo potiſſimum notari meretur, quod numeri 13, 14, 15

*) Gerbertus, in epiſtola ad Adelboldum Geometriae annexa, ſubtiliore discuſſione ſe illam rationem = 12 : 7 inueniſſe adfirmat, qua in discuſſione tamen falſus fuit. Nam ratio 12 : 7 multo minus accurata eſt, quam 26 : 15, vti vtramque duplicando intelligitur. Exſiſtit autem fractio $\frac{1}{2}$ et ipſa ex fractione continua, $\sqrt{3}$ exhibente, non immediate quidem, ſed interpolando ſeriem fractionum ipſo $\sqrt{3}$ minorum, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{71}{41}$ etc. vbi altero loco prouenit.

**) Cf. Tacqueti Scholium ad hanc propoſ. in Elem. geometr.

rationem laterum trianguli ſe
altitudo, hinc et area ration
VI. idem quidem obtinet, ſ
tum eſt rectangulum, cuius
3, 4, 5 ſunt proportionali
area, quae ducendo vnum c
terius efficitur, ſed et perpen
quod producto cathetorum
exſiſtit, rationale fiat, neceſ
ſuper c. XLI. problematis in
que caſum, quo vnus angule
et perpendiculum extra tria
ſolutionem quidem legitima
ſtructam, tradidit, verum
trianguli numeris inconſider
vit. Namque baſi dat 8,
vero 10 pedes, ponit ergo
minori ac baſi ſimul ſumtis,
non eſt, quod moneam.

§ VII. = art. 22. reg
Elem. I. 47. (IV. c. 21.) Pl
p. 1533. Archytae attrib
gulum in numeris, i. e., tre
niendi ſic comparatos, vt q
tum, aequale ſit quadratis d
ſummam collectis. Problem
tum eſt, Boëthius et Gerb
habet, nec non excerptorum
perinde puta ac ſi determin
In excerptis ab Haſio prod
formula, quam Proclo per
problemati ſoluendo conſti
thius p. 1524. et Gerberti
ſtrictius, hic autem paull
ſterior ad hoc a c. X. inde
dem verbis, nihilo ſecius ta

triangulis Pythagoricis, quo nomine veniunt numeri conditioni problematis modo propositi satisfacientes, differuit. Vtramque autem et Pythagorae et Platonis formulam demonstratam dedit Kaestnerus in *Elem. Analyss. finitor.* §. 137., vbi simul plura circa triangula Pythagorica affert notatu digna, illo tamen, quod vtique iucundum est cognitu, praetermisso, problema de inueniendis duobus numeris quadratis, quorum summa itidem sit numerus quadratus, ab Euclide iam in Elem. lib. X. prop. 29. Lemm. I. multo generalius, quam a Pythagora ac Platone praefitum erat, solutum esse. Huius vero solutionis ope in promtu est, quotcumque libet triangula scalena, quorum vt altitudo ita et area rationalis sit, in numeris inuenire. Sumto v. c. numero 144, qui quatuor modis ex duobus numeris planis similibus iisdemque paribus componitur, quum sit $144 = 8 \cdot 18 = 6 \cdot 24 = 4 \cdot 36 = 2 \cdot 72$, reperiri possunt, quatuor triangula Pythagorica, quorum vnum circa angulum rectum latus est $12 = \sqrt{144}$. Reliqua scilicet triangulorum istorum latera sunt, vnius $\frac{18+8}{2} = 13$, $\frac{18-8}{2} = 5$, alterius $\frac{24+6}{2} = 15$, $\frac{24-6}{2} = 9$, tertii $\frac{36+4}{2} = 20$, $\frac{36-4}{2} = 16$, quarti denique $\frac{72+2}{2} = 37$, $\frac{72-2}{2} = 35$. Hinc coniugatis iam binis quibusvis horum triangulorum ita, vt latus vnius numero 12 notatum lateri alterius, quod eodem numero insignitum est, applicetur ac superincidat, exsistunt duodecim triangula scalena, quorum latera rationes, in tabella sequenti expositas, seruant.

	I	II	III	IV
Baſis =	14	21	26	40
Crus maius =	15	20	20	37
Crus minus =	13	13	15	13
Altitudo =	12	12	12	12

Omiſſo triangulo III., rectangulum eſt, reliquorur gula, nouem poſteriora aut triangulum, quo Boëthius XIV. vſi ſunt, id habet inf dinem et latera exprimente turali ordine ſe inuicem exc gulum hoc aeque ſolitariu rectangulum laterum 3, 4, innumera triangula ſcalen naturali ſerie ſibi ſucceden tunc altitudo eorum huic le eſt ex tabula hic ſubiecta, c gula ob oculos ponit.

Baſis	=	52	194
Crus maius	=	53	195
Crus minus	=	51	193
Altitudo	=	45	168

Quoduis horum triangulor aequilaterum accedere, q facile perſpicitur.

Haſii exemplar art. 5. problema, quo ex datis ba zii rectanguli, area et latus

---

*) Baſes exhibitorum hi tudines conſtituunt ſeriem : — 1; 4. Primum membru rius 12, baſis quippe et praecedentis.

Numquam animum induxiſſem
rimumque ſuſpicionde, his T
praeuidiſſem animo, Te, qua
accepturum eſſe, quae volun
loco habeo, non magis, quam
tenebar, ſtudium erga Te meu
blice teſtandi, obtemperaturus
volui. Quaeſieras ex me prc
gnaris, in litteris ad me huma
olim in commentatione Societ
oblata de duabus Columella
conſcripſeram, alicubi iam e
quo quidem Tuam eorum
voluntatem haud obſcure ſig
Illa igitur iam ad Te vna cum
vtcumque reficta atque clima
poſſet, exſpectatione digniora
de euulgatis in Bredouii T
Epaphroditi et Vitruuii Ruf
certiorem me faciendo haud pa
ras. Huic tantae benevolentiæ
reſpònderem, ſimulque nutui
riſienſ. p. 234. deprehendere
commodarem, conſtitui, quae
luſtranti in mentem venere,
ſunt, Tecum hic communica
annotatiunculis meis ordinem
Schotti exemplar ſeruat, q
maximam partem praeceptor
prolatorum, verum praetere
quae Haſius nondum publicau

libri primi, ſe ea, quae ab Euclide obſcure prolata eſſent, exponenda et lucidiore aditu expolienda ſuſcepiſſe profitetur. Atqui extrema pars libri primi et integer liber ſecundus ab hoc inſtituto procul abſunt, quum eiusmodi complectantur res, quarum nullam apud Euclidem, vt iam monui, repereris, praeter definitiones aliquot circa finem libri primi, quae eaedem iam in principio libri extant. Accedit, quod harum definitionum alterae prioribus concinnitate atque accuratione longe ſunt inferiores, quod quomodo cuenire potuerit, ſi eundem auctorem Boëthium habeant, parum intelligo. Praeterea hae ipſae definitiones, quae in extrema libri primi parte p. 1516—1517. leguntur, inueniuntur quoque maximam partem iisdem, quibus apud Boëthium, verbis expreſſae in Frontini expoſitione formarum, quae adnotante Goeſio in MStis partim M. Iunio Nypſo, partim Gerberto adſcribitur. Et ſic plura libri ſecundi capita paſſim in ſcriptoribus rei agrariae aliis auctoribus adtributa offendes. Rubricae autem de abaci ratione et de diuiſionibus, quae in fine libri primi p. 1517—19. habentur, alieno plane loco poſitae ſunt, vtpote ad arithmeticam potius quam ad geometriam referendae. Neſcio an et illud, quod antiquiſſima geometriae Boëthii editio, cuius ſupra mentionem feci, extremam partem libri primi ac totum librum ſecundum non continet, ſed opus verbis libri primi: *quod oportebat facere*, quae in ſumma pagina 1516 leguntur, finit, pro argumento, illam partem iſtumque librum Boëthii non eſſe, habendum ſit.

Sed miſſa hac de geometria Boëthii diſputatione, quam tamen Tibi, eruditiſſime ac ſummopere colende Schneidere, non diſplicituram confido, ad propoſitum vediertor. Gerbertus igitur, qui formulas §. VIII—XVI. cap. LV., LX. et LXV. habet, errorem, quem

Boëthii *), atque excerp
commiſerunt, cum iis non
ma tradita. Neque diuer
regularis a ſummo puncto
illum omnino praeteriit, ſi
re ad Adelboldum ſcripta
feor, apparet. Ceterum
mendis non ſolum ſcriptur
praeter modum ſeatet, h
quas in inueniendis numeri
viciſſim his ex illis, nec n
ſequi oportet, hic apponen
larum ſubſidio quilibet le
verſatus menda iſta absq
animaduerterit, §. VIII. et
lygonios ex latere, §. IX.
lis, §. X. numerum hexa
hoc ex illo, ſed formula i
XV. et XVI. non modo n
ribus haecque ex iſtis, ver
les inueſtigari. Formulae

*) Breuitatis cauſa hu
etiamſi totius operis geomet
rentis auctor non ſit.

**) Bachetus duas
rio ſuo ad prop. IX. libri D
tangulis, tertiam autem in
tradidit. Fluunt hae regul
in Lexic. mathem. artt. *Pol
zahlen* Tom. III. p. 822. et
et altera mera ſunt transla
ſignis algebraicis in verbi
tiendae formula p. 930. $\frac{1}{8}$
ſic exprimi debet: $\frac{1}{8}[(m-2)$
vbi $(m-2)r-(m-4)r$
nalis. Conferri quoque e
l. a. l. de regulis particulari

I) Vt numerus polygonalis lateris dati inueniatur, ducatur quadratum lateris in numerum angulorum binario diminutum et a producto auferatur latus toties ſumtum, quot anguli quatuor demtis reſtant, reliqui dimidium erit numerus quaeſitus.

II) Ad inueniendum latus numeri polygonii dati multiplicetur hic per octuplum numeri angulorum binario mulctati, producto addatur quadratum numeri angulorum quaternario diminuti, et ſummae quaeratur radix quadrata. Cui inuentae ſi adiiciatur numerus angulorum quaternario mulctatus, ſummaque per duplum numeri angulorum binario diminuti diuidatur, quotus latus, quod quaeritur, manifeſtabit.

III) Numerum pyramidalem formaturus quaerat primo numerum polygonalem cognominem, huius dein duplo adiiciat latus ipſum, et ſummam ducat in latus vnitate auctum, producti partem ſextam ſumat, et numerum requiſitum habebit.

Si formula I et II trigono applicetur, notandum eſt, numerum angulorum quaternario multatum fieri negatiuum, ſcilicet $= -1$, quare in applicatione formulae I latus ſemel ſumtum non ſubtrahi, ſed addi debet. Numeri vero negatiui quadratum quum poſitiuum ſit, in accommodatione formulae II. quadratum vnitatis omnino adiiciendum, poſtea autem a radice quadrata inuenta vnitas deducenda eſt.

Vſus formularum prolatarum quo expeditior reddatur, exemplum eius praebuiſſe conueniet. Quaeramus igitur numerum heptagonum lateris 10. Ex formula I. hic eſt $= \frac{(7-2).10^2-(7-4).10}{2}$

$= \frac{5.100-3.10}{2} = \frac{500-30}{2} = \frac{470}{2} = 235.$

Si vicissim latus quaerendum sit, ad formulam II. est $= \frac{3+\sqrt{(8(7-2).235+3^2)}}{2(7-2)} = \frac{3+\sqrt{(40.235+9)}}{10}$

$= \frac{3+\sqrt{9409}}{10} = \frac{3+97}{10} = \frac{100}{10} = 10.$ Quodsi desideretur numerus pyramidalis heptagonus lateris 10, erit is per formulam III. $= \frac{(2.235+10)(10+1)}{6}$

$= \frac{480.11}{6} = \frac{5280}{6} = 880.$

Ex hoc exemplo perspicitur, principium §. XI. sic constitui debere. Omn. hept. aequis hab. later., cuius latus vnum in se multip. et postea quinquies duco; ipsam aream (sic inepte vocatur latus et a Gerberto) ter deduco, dimidiam partem sumo, heptagonum dico. Atque eadem ratione reliqua pars huius §. facile restituetur.

§. XVII. de colligenda sphaerae superficie (*incuruatura*) ex diametro praecipit. Praeceptum fundatur in prop. 137. libri I. Archimedis de sphaera et cylindro, a quo auctore etiam adhibita ratio diametri ad peripheriam, quae = 7 : 22 statuitur, arcessita est. Inscriptio c. LVIII. apud Gerbertum simile quidem praeceptum annunciat, verum formula ibi tradita non integram sphaerae superficiem, (*aream*) sed tantummodo quartam eius partem, aream puta circuli sphaerae maximi, praebet. At formula c. LXXXVI. contra titulum, qui est de inuenienda circuli incuruatura, superficiem sphaerae exhibet. Ceterum in fine §. verbis: *ac decima sexta* expunctis, inserendum est: *fit* 616.

§. XVIII. aream circuli ex diametro sola, §. XIX. autem eam ipsam ex diametro et ambitu inuestigare docet. Fundamen praescriptorum est prop. III.

in Archimedis libr. de dimenſione circuli. Gerbertus eadem praecepta habet c. LVI. et LXXVII., poſterius et Boëthius p. 1533. In numerorum vero §. XVIII. locum ex ordine ſubrogandi ſunt hi 196, 2156, 164.

§. XX. eſt praeceptum a Columella libr. V. c. II. art. 8. traditum aream ſemicirculi ex baſi eius i. e. diametro et latitudine curuaturae i. e. ſemidiametro inueniendi, ſed aliquatenus deformatum ac deprauatum. Rectius idem Boëthius p. 1534. propoſuit, et Gerbertus c. LVII. nec non LXXIX. repetiuit, niſi quod priore loco ſemidiameter circuli inepte diametrum ſemicirculi appellatur.

§. XXI. monſtrat circuli (maximi) triangulo rectangulo inſcripti diametrum ex lateribus inuenire. Formula ad hoc tradita, quam etiam Boëthius p. 1526. et Gerbertus c. LIX. praeſcribunt, recte ſe habet. Namque ex demonſtratione propoſ. 6. libr. IV. Elem., qua circulum dato triangulo inſcribere docemur, apparet, in ſchemate ibi appoſito eſſe BE = BF, nec non CF = CG. Quodſi iam ducta intelligatur AD, ob $AD^q = AE^q + DE^q = AG^q + DG^q$, et quia $DE^q = DG^q$, erit etiam $AE^q = AG^q$, hinc AE = AG. Poſito autem ABC angulo recto, DBE eſt = ¼ recti = BDE, proinde (Elem. I. 6.) DE = BE. Porro quum ſit AB + BC = 2BE + AE + CF = 2DE + AG + GC = 2DE + AC, habetur AB + BC — AC = 2DE. Sed eſt DE radius, ergo 2DE diameter circuli inſcripti, idoque exceſſui, quo cathetorum ſumma hypotenuſam ſuperat, aequalis.

§. XXII. praeceptum eſt, altitudinem, ad quam acceſſus patet, ſine vllo calculo metiendi. Ratio illius in eo poſita eſt, vt rectae ex oculo in cacumen edu-ctae inclinatio ad planum horizontale per oculum de-

ductum dimidio recto aequalis ſit. Veru
do methodo in excerptis expoſita obtinea
poteſt. Tradunt quidem nonnulli geoda
res modum altitudinem acceſſibilem ab
metiendi, quem hominibus illiteratis, ve
in vſu eſſe dicunt; at is modus non ſine
procedit, ſed baculo, ſtaturam menſori
paullum excedente, opus habet. Huius q
ram ad corporis altitudinem infixi ſummi
qui ſupinus humi iacet, pro puncto vtitu
viſum in cacumen dirigat, cuius vicem qu
punctum in excerptoris methodo explea
eſt, quod in quaeſtione verſatur.

§. XVIII. problema arithmeticum
niendo iugerorum numero, qui in pro
millium paſſuum per 10000 (paſſuum) 1
rum continetur. Pro fundamento ponitu
ſuum per mille conficere iugera 868,
vero proximum eſt. Diuiſo enim num
1000 ſiue 1000000 paſſ. quad. per 1152
quot iugero inſunt, efficitur quotus 8
Solutio autem, quae in Schotti exempl
perplexior eſt, ita procedit. Quoniam

$= 10$, ergo $\frac{10000 \times 10000}{1000 \times 1000} = 10 \times$

10000 × 10000 paſſ. quadr. = 10 × 10
1000 paſſ. quadr. = 10 × 10 × 868 iug
iug., neglecto numero 5 iugerorum, qu
plicatione partis decimae octauae iuger
prouenit.

Ex iis, quae hactenus de argument
rum diſputaui, perſpicuum eſſe puto, eorui
geometriae non admodum gnarum fuiſſe,
pta a ſe temere collecta ſaepenumero male

saepius etiam sine ordine et confuse proponeret. Praeterea manifestum esse credo, auctorem nostrum ex iisdem fontibus, vnde Boëthius et Gerbertus suas metiendi formulas sumserunt, hausisse. Etenim eiusmodi formulas in promtu fuisse, si non per se verisimillimum esset, testimonio Gerberti certum atque indubitatum fieret, qui c. IV. se ex regulis, quae ad aream figurarum inueniendam passim dispersae ferrentur, vtiliores digessisse, plane ac diserte profitetur.

Haec sunt, quae super excerptis Epaphroditi et Vitruuii Rufi, per se quidem parui faciendis, at in historia geodaesiae non omnino contemnendis, in medium afferre habui. Reliquum est, vt Te, Schneidere doctissime et maximopere suspiciende, orem, vt adnotationes has qualescumque nomine Tuo celeberrimo inscriptas aequi bonique facias, mihique et in posterum faueas.

ADDENDA ET

p. 22. lin. 22. pro *ex iis*

p. 24. lin. 31. deleatur c
ponatur verbo *Piſcis*.

p. 38. Differentia inter
et accuratius definitur dicer
ra iam extante atque conſt
conſtruendaque. Hinc ſpo
in circulum, *tota* atque
ta, circuloque ſuperimp
circulo deſcribendo eam
Intenditur, ſi fieri poteſt,
circulum, at *inſcribitur*
aequiangulum triangulo d
IV. et Proclus l. infra

p. 39. Mirum forſita
bo παραβάλλειν, quod P
conſtructione figurae de
runt, non vſus fuerit. V
cientem vel excedentem,
βάλλεσθαι dicitur, ſem
(χωρίον); quare Platoni

deficiente verba faceret, neceſſe fuit, aliud verbum quam παραβάλλειν adhibere.

p. 47. lin. 5. pro *BC* ⋈ ϙ leg. *BC*ϙ ⋈

p. 56. lin. 8. pro τὴν legas τήν.

p. 60. Verbum, quo ſimpliciſſime transmutatio figurae in aliam formam indicatur, eſt μεταμορφόειν.

p. 64. Schleiermacherus non de triangulo rectangulo generatim, ſed de triangulo rectangulo aequicruro agi coniicit, idque ex occaſione ſchematis, quod Socrates duplicationis quadrati commonſtrandae cauſa deſcripſit et editores Berolinenſ. p. 39. delineandum curarunt. Iſta vero coniectura quum longe abſit a Platonis mente, vera vtique dici nequit.

pag. ead. Exſcripta iam erant typis omnia, quum ab amico litterato admonitus fui, in diarii dicti: *Schleſiſche Provinzialblätter* faſciculo octauo anni 1812, extare etiam loci a me tractati explicationem, cuius aliqua expoſitio quum merito deſiderari atque exſpectari poſſit, ſummam eius breuiter hic enarrabo. Auctor Ferdinandus Niekelius illa luculentum omnino eruditionis ſuae mathematicae ſpecimen edidit, ſicut ex iis, quae iam afferentur, patebit.

Ante omnia inculcat, haud facile euenturum eſſe, vt triangulum aliquod propoſitum dato circulo ſic includatur, vt latera trianguli fiant ſubtenſae circuli conterminae, quum triangulum quodcumque vno tantum circumſcribi poſſit circulo, probabilitas ergo incluſionem in caſu aliquo propoſito perficiendi ad probabilitatem contrariam ſit, vt o ad ι h. e. omnino nulla. Quare vtique eſſe licitum, ad quaeſtionem propoſitam: datumne triangulum dato circulo includi queat, vt audacter, nequire, reſpondeatur. Neque opus eſſe hypotheſi,

qua diiudicetur possibilitas, impossibilitate certa ferme atque explorata. Negat porro Niekelius, hypothesi quidquam aliud postulari posse, quam vt vel duobus trianguli lateribus quibuslibet bifariam diuisis in bisectionum punctis erigantur perpendiculares ad concursum vsque producendae, huiusque distantia a verticibus angulorum trianguli cum semidiametro circuli dati conferatur, ad cognoscendum, vtrum aequales sint nec ne, quippe quod aequalitas ad includendum dato circulo triangulum propositum necessaria sit; vel constitutis super duobus trianguli lateribus quibusuis triangulis isosceles, quorum crura sint radio circuli dati aequalia, videatur, num vertices eorum in eodem puncto coincidant, vtpote quod ad perficiendum intentum requiratur; vel etiam designata quantitate laterum trianguli per a, b, c, semidiametri circuli vero per r, inquiratur, aequatio relationem quantorum illorum exhibens

$$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

valeatne nec ne. Ex qua quidem aequatione rursum effici ait, vix ac ne vix quidem futurum esse, vt lateribus trianguli et semidiametro circuli ad libitum assumtis inclusio desiderata fieri possit. Praeterea neque vllam hypothesium modo enumeratarum ex Platonis verbis elici posse, nec requiri, quum res multo breuius coaptandis deinceps lateribus trianguli in circulo conficiatur.

Reiectis dein eruditorum, qui in nouissima editione Berolinensi laudantur, explicationibus, antequam ad exponendam suam ipsius sententiam progrediatur Niekelius, monet, etiamsi impossibile quasi sit, vt circulo cuilibet proposito quoduis inscribatur triangulum datum, attamen ex aequatione supra allata colligi, tendendo vel extendendo triangulum illud, perimetro

eius ſpectata tamquam linea extenſibili *) ſiue immutando latera ipſius, ſumma eorum ſeruata tamen, fieri omnino poſſe, vt in infinitis numero circulis aptetur. Nam ſi modo poſita laterum ſumma $a+b+c=m$, quantitates a, b, c ſic aſſumtae fuerint, vt duo latera quomodocumque ſumta reliquo ſint maiora, alios ſubinde atque alios repertum iri valores ipſius r. Hoc autem non obſtare, quominus innumeri ſuperſint circuli, in quibus triangulum aptare non liceat, omnes veluti, quorum ambitus ſit minor perimetro trianguli. Ac licet in innumeris caſibus impoſſibilitas incluſionis ſtatim in oculos incurrat, innumeros tamen caſus reſtare, in confinio quippe poſſibilitatis atque impoſſibilitatis ſitos, in quibus adſpectus ſolus ad iudicium ferendum non ſufficiat. Atque id ipſum eſſe in cauſa, cur hypotheſi opus ſit ad diiudicandum, vtrum incluſio ſuccedat nec ne.

His praemiſſis effert Niekelius quaeſtionem, quam Plato proponit, a quo quidem non temere nec ſine ratione verbum ἐντείνειν poſitum eſſe arbitratur, hunc in modum: *Poteſtne triangulum datum in dato circulo ſic extendi, vt latera eius iam exiſtentia fiant ſubtenſae circuli.* Tum verba difficilia: εἰ μὲν ἐστι .... enucleare adgreditur, quod quo perficiat γραμμὴν *perimetrum trianguli* ſignificare ſumit, et pro παρὰ legit παρίσως, quod ipſi valet *aequaliter*; παρατείνειν autem ipſi eſt: *ducere ſubtenſam in circulo*, οἷόν ἂν reddit: *fieri poteſt* **), atque ἐλλείπειν per *deficere*. Quibus

*) Cohibui manum a correctione, qua hic opus eſt. Auctor pro extenſibili voluit dicere flexibili. Poſita enim perimetro extenſibili fieri non poteſt, vt ſumma laterum eadem maneat.

**) Cauſam huius interpretationis ſumit ex eo, quod Plato τοιούτῳ χωρίῳ dixit, quoniam putat, illum ſcripturum

declaratis hypotheſin, verbis *εἰ μὲν ἐστι* .... expreſſam, ſic enunciat: *Si triangulum fuerit eiusmodi, vt perimetro eius aequaliter in circulo extenſa* (quod ſecundum Niekelium ſit accommodando in circulo tres rectas, aequales angulas trienti perimetri, ita vt media extremas tangat) *fieri poſſit, vt triangulo hac ratione extenſo deſit aliquid ad concluſionem perfectionemque; aliud quid caſurum eſt, rurſumque aliud, ſi illud fieri nequeat.* *) Nimirum ſi perimeter trianguli maior non fuerit perimetro trianguli aequilateri in dato circulo inſcribendi, vtpote omnium maxima, adeo vt arcus, qui a tribus rectis in circulo accommodatis ſubtenduntur, ſimul ſumti integram non excedant peripheriam, triangulum datum ſic licet tendere vel extendere, vt in dato circulo queat aptari: ſin aliter fuerit, intentum non perficietur.

Haec explicatio magno quamuis eruditionis mathematicae apparatu, qui ei ſpeciem aliquam roboris ac probabilitatis inducit, propoſita et ſuffulta, multa tamen habet aut praue conſtituta aut male expoſita, quorum illud grauiſſimum eſt, quod triangulum, de quo exponit hypotheſis, non eſt triangulum ab initio

---

fuiſſe τοιοῦτον χωρίον, ſi per οἷον ἂν *tantum quantum* exprimere voluiſſet. Ignorauit itaque Niekelius vſum verbi ἐλλείπειν, qui apud Graecos geometras obtinet.

*) Verba ipſa Niekelii ſunt: *Wenn das Dreyeck von der Art iſt, daſs wenn man ſeinen Umfang gleichmäſsig in den Kreis ausſpannt, (nämlich in ein gleichſeitiges Dreyeck, welches leicht geſchehen kann, wenn man den dritten Theil des Umfanges als Sehne im Kreiſe herumträgt) und es geſchehen kann, daſs dem ſo ausgeſpannten Dreyeck* (τὸ παραταθέν) *etwas zum Schluſſe fehlt* (ἐλλείπει τοιούτῳ χωρίῳ) *ſo wird, dünkt mich etwas anders ſeyn, und hinwiederum etwas anders, wenn dies nicht geſchehen kann.*

datum, circa quod verſatur quaeſtio, ſed plane aliud, et triangulo propoſito nonniſi iſoperimetrum. Talis vero ſuppoſitio vel permutatio in ludo quidem ac ioco, at non in disputatione ſeria ferenda eſt. Fortaſſe hic Niekelius, ad ea prouocauerit, quae principio commentationis ſuae de probabilitate triangulum datum in dato circulo aptandi disputauit, exiguam probabilitatem quaeſtioni ſatisfaciendi ſuae eius inuerſioni praetexens, ſed fruſtra. Nam etiamſi ſit vero minus ſimile, aptationem deſideratam in caſu aliquo propoſito effici poſſe, quam non poſſe, attamen geometrae certa atque explorata, non vero probabilia tantum, ſectantis eſt, determinare, qua ſub conditione aptatio locum habeat, qua non. Neque opponere licet, verbo ἐντείνειν adſtrui et comprobari aliquatenus iſtam, quam Niekelius in reddenda quaeſtione atque exponenda hypotheſi ſecutus eſt, rationem, quum aliud ſit ἐντείνειν χωρίον εἰς κύκλον, aliud ἐντείνειν vel, ſicut Euclides loquitur, ἐναρμόζειν περιμέτρον χωρίου εἰς κύκλον, quorum neutrum pro altero accipi, neque in oratione accurata, qualis quidem a Platone exſpectatur, alteri ſubſtitui poteſt. Praeterea haud immerito dubitauerit quis, num Platoni illa trianguli aequilateri proprietas, qua inter omnia triangula eidem circulo inſcripta maxima praeditum eſt perimetro *), cuiusque cognitio ad condendam hypotheſin Platoni a Niekelio attributam, requiritur, nota fuerit, quum veteres disquiſitiones ſuas circa maxima minimaue in figuris tam planis quam ſolidis exiſtentia

*) Demonſtratio proprietatis trianguli aequilateri hic memoratae pendet ex eo, quod rectarum, quae in portione circuli inflectuntur, vt Serenus libr. II. de Sectione Coni, prop. 44. oſtendit, maxima eſt, quae ad punctum medium arcus inflectitur, quod idem facile ex demonſtrat. prop. 94. Dator. colligitur.

tantum non ad ſolas figur
monumentis eorum a The
appareat.

Quae hactenus de N
ad res pertinent, ac mon
concinnitatem atque incon
magis pateſiunt, ſi ad verb
terpretandis Niekelius ide
enim de audentiore ipſius
verbium *παρίσως* mutatio
vocabulo *γραμμῆς* adſignat
eſt. Nec minus peruerſe v
ſubtenſam ducere in circ
bo *ἐντείνειν* vel *ἐγγράφειν*
additamento *εἰς κύκλον*, c
comprobatam tacite ſtatuit
verbum *ὑποτείνειν* allegat,
vt ſit: hypotenuſam ducere
verbum ad ſignificandam
verum ſic, vt ea dicatur
cum ſubtendere). Porro ſ
tur, vt vult Niekelius, ora
languida ac paene puerili
plane rudis ad hunc modu
fuer. eiusm. vt perim. ei. a

---

*) *Εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου*
Collect. mathem. libr. V. — T
de figuris iſoperimetris in vſu
tamen quam Pappus ampliore
ter tantum pertractauit. Theon
introductione ad librum: De
terminorum figurarum, quam
refert.

**) Cf. quae de hoc verbo